О НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСАХЪ,

НАХОДЯЩИХСЯ ВЪ СВЯЗИ СО СЧЕТОМЪ

ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

И. Ивановъ.

САНКТЪ-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1901.

О НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСАХЪ,

НАХОДЯЩИХСЯ ВЪ СВЯЗИ СО СЧЕТОМЪ

ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

И. Ивановъ.

САНКТЪ-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1901.

По опредѣленію Физико-математическаго факультета Императорскаго С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается.

24 февраля 1901 г. Деканъ *В. Шевяковъ*.

Эйлеру мы первому обязаны примѣрами приложенія анализа къ рѣшенію вопросовъ теоріи чиселъ. Изъ безконечныхъ произведеній, находящихся въ его знаменитомъ Введеніи въ Анализъ, разложеніемъ въ ряды которыхъ онъ пользуется для доказательства различныхъ предложеній изъ теоріи чиселъ, особенно важную роль сыграли безконечныя произведенія, зависящія исключительно отъ простыхъ чиселъ. Изученіе свойствъ функцій, опредѣляемыхъ такими произведеніями, привело къ нѣкоторымъ существеннымъ результатамъ относительно очень трудныхъ вопросовъ, находящихся въ связи съ распредѣленіемъ простыхъ чиселъ, какъ въ рядѣ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, ... , такъ и въ рядѣ чиселъ, составляющихъ какую либо ариѳметическую прогрессію, въ которой первый членъ и разность цѣлыя взаимно простыя числа. Къ числу такихъ вопросовъ относятся, между прочимъ, слѣдующіе: 1) опредѣленіе числа всѣхъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго предѣла; 2) приближенныя вычисленія нѣкоторыхъ суммъ, составленныхъ изъ членовъ, зависящихъ исключительно отъ простыхъ чиселъ; 3) вопросы о сходимости рядовъ, члены которыхъ зависятъ исключительно отъ простыхъ чиселъ. Очень важные, строго доказанные результаты по отношенію къ этимъ послѣднимъ вопросамъ мы находимъ ближайшимъ образомъ въ изслѣдованіяхъ двухъ знаменитыхъ математиковъ: нашего — П. Л. Чебышева и германскаго — L. Dirichlet, въ трудахъ которыхъ, посвященныхъ простымъ числамъ, Эйлеровскія идеи получили дальнѣйшее развитіе. Вотъ результаты, полученные Чебышевымъ: 1) доказательства нѣкоторыхъ свойствъ функціи, выражающей число простыхъ чиселъ, меньшихъ заданнаго числа; 2) выводъ неравенствъ для суммъ логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ заданнаго предѣла и 3) установленіе критеріумовъ сходимости и расходимости рядовъ

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \dots ,$$

члены которыхъ, начиная съ нѣкотораго, числа положительныя. Что же

касается L. Dirichlet, то ему мы обязаны классическимъ доказательствомъ расходимости ряда

$$\sum \frac{1}{p},$$

въ которомъ суммированіе распространено исключительно на простыя числа формы

$$ax + b.$$

Изъ послѣдующихъ работъ, находящихся въ тѣсной связи съ изслѣдованіями Чебышева и Dirichlet, особенно выдѣляются изысканія Мертенса. Ему удалось, на основаніи результатовъ, полученныхъ Чебышевымъ, дополнить результаты Dirichlet приближенными вычисленіями двухъ суммъ

$$\sum \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad \sum \frac{\log p}{p},$$

гдѣ суммированія распространены на всѣ простыя числа, не превышающія даннаго предѣла и заключающіяся въ линейной формѣ

$$ax + b.$$

Какъ слѣдствіе, Мертенсъ получилъ слѣдующее предложеніе: если a и b обозначаютъ цѣлыя взаимно простыя числа, то существуетъ такое конечное число B, вполнѣ опредѣляющееся заданнымъ числомъ a, что, каково бы ни было цѣлое число $N > 2$, въ рядѣ чиселъ

$$N + 1, \quad N + 2, \ldots N + BN$$

существуетъ по крайней мѣрѣ одно простое число формы $ax + b$. Замѣтимъ, что подобное же предложеніе было получено еще Кронекеромъ. Доказательство послѣдняго не проще доказательства, даннаго Мертенсомъ. Кромѣ того въ изслѣдованіи Кронекера мы не находимъ установленія связи между изысканіями Dirichlet и Чебышева, что имѣется у Мертенса и что по нашему мнѣнію дѣлаетъ изысканія послѣдняго особенно цѣнными.

Руководясь желаніемъ дать изложеніе только вполнѣ строго установленныхъ результатовъ относительно тѣхъ вопросовъ о простыхъ числахъ, о которыхъ было сказано выше, мы въ предлагаемомъ разсужденіи остановились исключительно на изложеніи (съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями) изслѣдованій Чебышева, Dirichlet и Мертенса. Попутно приведены и нѣкоторые результаты, полученные въ различное время нами.

Изъ сейчасъ сказаннаго слѣдуетъ, что въ нашемъ разсужденіи совершенно не затрогиваются тѣ изслѣдованія, основаніемъ которыхъ слу-

жить извѣстный мемуаръ Римана «Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse». Дѣло въ томъ, что въ настоящее время еще трудно сказать, какіе результаты авторами послѣднихъ изслѣдованій получены и строго доказаны. Дадимъ теперь краткое изложеніе содержанія тѣхъ трехъ главъ, изъ которыхъ состоитъ наше разсужденіе. Содержаніе I главы: *a*) доказательство одной формулы Чебышева, бывшей по словамъ покойнаго математика, исходной въ его изысканіяхъ о простыхъ числахъ; *b*) формулы Эйлера; *c*) рядъ предложеній Чебышева о простыхъ числахъ; изъ этихъ предложеній особенно важно третье, въ которомъ устанавливается связь между числомъ простыхъ чиселъ, меньшихъ заданнаго предѣла, и интегральнымъ логариѳмомъ; *d*) доказательства теоремы Дирихле объ ариѳметической прогрессіи для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

При наведеніи библіографическихъ справокъ оказалось, что случаи $8m \pm 1$, $8m \pm 3$, $12m \pm 1$, $12m \pm 5$ разсмотрѣны были уже Serret въ журналѣ Ліувилля, т. XVII, 1-я серія. Имъ же былъ разсмотрѣнъ и случай: $2px + 1$, гдѣ p простое число. Болѣе общій случай — $ax + 1$, разсматриваемый нами, также былъ предметомъ изслѣдованія нѣкоторыхъ математиковъ, напр. Кронекера (Vorlesungen über Mathematik von Leop. Kronecker), но доказательство, предлагаемое нами, какъ намъ кажется, наиболѣе простое.

Содержаніе II-й главы: *a*) выводъ неравенствъ Чебышева для суммъ логариѳмовъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ заданнаго предѣла; *b*) критеріумы для сходимости и расходимости рядовъ

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \dots,$$

члены которыхъ, начиная съ нѣкотораго, числа положительныя; *c*) выводъ неравенствъ для суммъ логариѳмовъ простыхъ чиселъ заключающихся въ одной изъ слѣдующихъ формъ

$$4m \pm 1, \quad 6m \pm 1$$

и не превосходящихъ заданнаго предѣла. Для простыхъ чиселъ формъ $4m \pm 1$ этотъ вопросъ, на сколько намъ извѣстно, впервые рѣшенъ В. И. Станевичемъ. *d*) Приближенныя значенія выраженій

$$\sum_2^a \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad \prod_2^a \frac{1}{1-\frac{1}{p}},$$

гдѣ суммированіе и произведеніе распространены исключительно на простыя числа, не превосходящія a. Большая часть III-й главы посвящена изслѣ-

дованію Мертенса о простыхъ числахъ, заключающихся въ линейной формѣ $ax+b$. Заканчиваемъ же мы третью главу доказательствомъ обобщенной нами одной теоремы Чебышева о простыхъ дѣлителяхъ чиселъ вида

$$4x^2+1.$$

Въ заключеніе считаемъ своимъ долгомъ выразить глубокую благодарность академику А. А. Маркову, сообщившему намъ двѣ теоремы Чебышева (I и II теоремы § 6; въ печати онѣ появляются впервые) и обратившему наше вниманіе на мемуаръ Мертенса, которому посвящена большая часть третьей главы настоящаго разсужденія.

ГЛАВА I.

Формула Чебышева. Формулы Эйлера. Теоремы Чебышева. Доказательство теоремы Дирихле объ ариѳметической прогрессіи для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

---

§ 1. Пусть $f(x)$ обозначаетъ такую функцію отъ x, для которой рядъ

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} f(n)\log n = f(2)\log 2 + f(3)\log 3 + f(4)\log 4 + \ldots\ldots$$

былъ бы абсолютно сходящійся.

Далѣе пусть p обозначаетъ любое простое число, не превосходящее заданнаго цѣлаго положительнаго числа k и λ — цѣлое число, удовлетворяющее условіямъ

$$p^{\lambda} \leqq k < p^{\lambda+1}$$

Легко найдемъ, что

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=2}^{n=k} f(n)\log n = \sum A_p \log p,$$

гдѣ суммированіе въ правой части равенства распространено на всѣ простыя числа p, не превосходящія k и

$$A_p = \sum_{n=1}^{n=E\frac{k}{p}} f(np) + \sum_{n=1}^{n=E\frac{k}{p^2}} f(np^2) + \ldots + \sum_{n=1}^{n=E\frac{k}{p^{\lambda}}} f(np^{\lambda}),$$

при чемъ Ez, какъ принято, обозначаетъ цѣлую часть числа z. Обозначимъ черезъ μ произвольное цѣлое число, большее наибольшаго изъ чи-

селъ λ. Беря цѣлое число l достаточно большимъ, мы можемъ утверждать, что въ составъ суммы

$$\sum_{n=k+1}^{n=l} f(n) \log n$$

войдетъ сумма

$$\sum B_p' \log p,$$

гдѣ суммированіе по p распространено на всѣ простыя числа, не превосходящія k и

$$B_p' = \sum_{n=E\frac{k}{p}+1}^{n=E\frac{l}{p}} f(np) + \sum_{n=E\frac{k}{p^2}+1}^{n=E\frac{l}{p^2}} f(np^2) + \ldots + \sum_{n=E\frac{k}{p^\mu}+1}^{n=E\frac{l}{p^\mu}} f(np^\mu).$$

Замѣчая, что

$$\operatorname{Mod} \sum B_p' \log p \leqq \sum (\operatorname{Mod} B_p') \log p,$$

$$\operatorname{Mod} B_p' \leqq \sum_{n=E\frac{k}{p}+1}^{n=E\frac{l}{p}} \operatorname{Mod} f(np) + \sum_{n=E\frac{k}{p^2}+1}^{n=E\frac{l}{p^2}} \operatorname{Mod} f(np^2) + \ldots + \sum_{n=E\frac{k}{p^\mu}+1}^{n=E\frac{l}{p^\mu}} \operatorname{Mod} f(np^\mu)$$

и что сумма

$$\sum C_p \log p,$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ простыя числа, не превосходящія k и

$$C_p = \sum_{n=E\frac{k}{p}+1}^{n=E\frac{l}{p}} \operatorname{Mod} f(np) + \sum_{n=E\frac{k}{p^2}+1}^{n=E\frac{l}{p^2}} \operatorname{Mod} f(np^2) + \ldots + \sum_{n=E\frac{k}{p^\mu}+1}^{n=E\frac{l}{p^\mu}} \operatorname{Mod} f(np^\mu),$$

входитъ въ составъ суммы

$$\sum_{n=k+1}^{n=l} \operatorname{Mod} f(n) \log n,$$

мы, въ силу абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} f(n) \log n,$$

при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ k, будемъ имѣть:

$$\text{Mod} \sum B_p' \log p < \alpha$$

какъ бы ни было мало число α большее 0. А потому

$$\sum_{n=2}^{n=k} f(n) \log n = \sum B_p'' \log p + \beta,$$

гдѣ суммированіе въ правой части распространено на всѣ простыя числа p, не превосходящія k и

$$B_p'' = \sum_{n=1}^{n=E\frac{l}{p}} f(np) + \sum_{n=1}^{n=E\frac{l}{p^2}} f(np^2) + \ldots + \sum_{n=1}^{n=E\frac{l}{p^\mu}} f(np^\mu),$$

$$\beta = -\sum B_p' \log p,$$

а слѣдовательно,

$$\text{Mod}\, \beta < \alpha.$$

Предполагая k и μ заданными числами, l — числомъ безпредѣльно возрастающимъ и принимая во вниманіе полученный результатъ, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ k и всякомъ цѣломъ положительномъ значеніи μ, большемъ наибольшаго изъ чиселъ λ имѣемъ:

$$\sum_{n=2}^{n=k} f(n) \log n = \sum A_p' \log p + \beta', \tag{1}$$

гдѣ суммированіе въ правой части распространено на всѣ простыя числа, не превосходящія k,

$$A_p' = \sum_{n=1}^{n=\infty} f(np) + \sum_{n=1}^{n=\infty} f(np^2) + \ldots\ldots + \sum_{n=1}^{n=\infty} f(np^\mu)$$

и

$$\text{Mod}\, \beta' < \alpha,$$

какъ бы ни было мало число α большее 0. Такъ какъ при безпредѣльномъ возрастаніи k наибольшее изъ чиселъ λ, а слѣдовательно и число μ, безпредѣльно возрастаютъ, то на основаніи равенства (1) мы приходимъ къ слѣдующей формулѣ

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} f(n) \log n = \sum_{2}^{\infty} F(p) \log p,$$

гдѣ во второй части суммированіе въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ простыя числа и

$$F(p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f(np) + \sum_{n=1}^{n=\infty} f(np^2) + \sum_{n=1}^{n=\infty} f(np^3) + \ldots\ldots$$

§ 2. Выведенная нами формула принадлежитъ П. Л. Чебышеву. Изъ нея, какъ замѣтилъ самъ покойный знаменитый математикъ, могутъ быть получены тѣ формулы, которыя являются исходными въ его изысканіяхъ о простыхъ числахъ. Мы ближайшимъ образомъ, пользуясь ею, выведемъ три формулы Эйлера, изъ которыхъ первая является исходной въ первомъ мемуарѣ, посвященномъ Чебышевымъ простымъ числамъ. («Объ опредѣленіи числа простыхъ чиселъ, не превосходящихъ данной величины». Сочиненія П. Л. Чебышева, т. I). Пусть

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\rho}},$$

гдѣ $\rho > 0$. Въ этомъ случаѣ

$$F(p) = \left(\frac{1}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{p^{2(1+\rho)}} + \ldots\ldots\right) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} = \frac{1}{p^{1+\rho} - 1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}$$

и формула (2) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^{1+\rho}} = \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}\right) \left(\sum_{2}^{\infty} \frac{\log p}{p^{1+\rho} - 1}\right)$$

Дѣля обѣ части полученнаго равенства на сумму

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}$$

и интегрируя по ρ въ предѣлахъ отъ нѣкотораго заданнаго значенія $\rho > 0$ до ∞, мы придемъ къ слѣдующему равенству

$$(3) \qquad \log \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} = -\sum_{2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p^{1+\rho}}\right).$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, приходимъ къ слѣдующей извѣстной формулѣ Эйлера:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{1+\rho}}\right)\cdots}=1+\frac{1}{2^{1+\rho}}+\frac{1}{3^{1+\rho}}+\frac{1}{4^{1+\rho}}+\cdots$$

§ 3. Полагая для всѣхъ цѣлыхъ значеній $x \geqq 1$,

$$f(x)=\frac{\alpha_x}{x^{1+\rho}},$$

гдѣ $\rho > 0$ и α_x равно 0, если x число четное, и α_x равно $\left(\frac{-1}{x}\right)$ (символъ Лежандра-Якоби), если x нечетное, имѣемъ:

$$F(2)=0$$

и при $p > 2$

$$F(p)=\left[\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{1+\rho}}+\frac{1}{p^{2(1+\rho)}}+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{3(1+\rho)}}+\frac{1}{p^{4(1+\rho)}}+\cdots\right]\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)}{n^{1+\rho}},$$

гдѣ суммированіе по n въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ нечетныя числа. Слѣдовательно,

$$F(p)=\frac{1}{p^{1+\rho}-\left(\frac{-1}{p}\right)}\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{n^{1+\rho}}$$

и формула (2) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{3}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)\log n}{n^{1+\rho}}=\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)}{n^{1+\rho}}\right)\left(\sum_{3}^{\infty}\frac{\log p}{p^{1+\rho}-\left(\frac{-1}{p}\right)}\right).$$

Дѣля обѣ части этого равенства на сумму

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)}{n^{1+\rho}}$$

и интегрируя по ρ въ предѣлахъ отъ нѣкотораго значенія $\rho > 0$ до ∞, придемъ къ слѣдующему равенству:

$$\log\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)}{n^{1+\rho}}=-\sum_{3}^{\infty}\log\left(1-\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{p^{1+\rho}}\right). \tag{4}$$

Переходя же отъ логариѳмовъ къ числамъ, получимъ вторую формулу Эйлера:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{1+\rho}}\right)\left(1+\frac{1}{7^{1+\rho}}\right)\cdots}=1-\frac{1}{3^{1+\rho}}+\frac{1}{5^{1+\rho}}-\frac{1}{7^{1+\rho}}+\frac{1}{9^{1+\rho}}\cdots$$

§ 4. Полагая для всѣхъ цѣлыхъ значеній $x \geqq 1$

$$f(x) = \frac{\beta_x}{x^{1+\rho}},$$

гдѣ $\rho > 0$ и β_x равно 0, если число x дѣлится на 2 или на 3 и β_x равно $\left(\frac{-3}{x}\right)$ въ противномъ случаѣ и разсуждая совершенно также, какъ и при выводѣ двухъ предыдущихъ формулъ, мы придемъ къ слѣдующему равенству:

$$\log \sum_1^\infty \frac{\left(\frac{-3}{n}\right)}{n^{1+\rho}} = -\sum_5^\infty \log\left(1 - \frac{\left(\frac{-3}{p}\right)}{p^{1+\rho}}\right), \tag{5}$$

гдѣ суммированіе по n въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ цѣлыя числа, не дѣлящіяся ни на 2, ни на 3, а по p — на всѣ простыя числа. Изъ равенства (5), какъ слѣдствіе, получимъ третью формулу Эйлера.

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{5^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{1+\rho}}\right)\left(1+\frac{1}{11^{1+\rho}}\right)\cdots} = 1 - \frac{1}{5^{1+\rho}} + \frac{1}{7^{1+\rho}} - \frac{1}{11^{1+\rho}} + \frac{1}{13^{1+\rho}} \cdots$$

§ 5. Формула Эйлера, выведенная нами въ § 2, является какъ выше мы замѣтили, исходной формулой въ первыхъ изслѣдованіяхъ Чебышева относительно простыхъ чиселъ, къ которымъ мы теперь и перейдемъ. Обозначимъ сумму

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}},$$

черезъ $f_1(\rho)$ и замѣнимъ каждый членъ этой суммы по извѣстной формулѣ

$$\frac{1}{n^{1+\rho}} = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty x^\rho e^{-nx}\, dx.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$f_1(\rho) = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty \frac{x^\rho\, dx}{e^x - 1}.$$

Послѣднее же равенство на основаніи равенства

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\int_0^\infty x^{\rho-1} e^{-x}\, dx}{\Gamma(1+\rho)}$$

преобразовывается въ такое

$$f_1(\rho) = \frac{1}{\rho} + f_2(\rho), \tag{6}$$

гдѣ

$$f_2(\rho)=\frac{1.}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)x^{\rho}\,dx.$$

Замѣняя въ правой части равенства (3) § 2 каждый изъ логариѳмовъ его разложеніемъ въ рядъ и полагая

$$f_3(\rho)=\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{p^{2(1+\rho)}}+\frac{1}{3}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{p^{3(1+\rho)}}+\frac{1}{4}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{p^{4(1+\rho)}}+\ldots\ldots,$$

мы можемъ, на основаніи равенства (6) настоящаго §, формулу (3) § 2 представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(7)\qquad \log\left(\frac{1}{\rho}+f_2(\rho)\right)=\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{p^{1+\rho}}+f_3(\rho).$$

Для дальнѣйшаго весьма важно замѣтить, что какъ сами функціи $f_2(\rho)$ и $f_3(\rho)$, такъ и ихъ производныя до какого угодно порядка m включительно остаются числами конечными при всѣхъ значеніяхъ $\rho \geq 0$.

§ 6. Ближайшимъ слѣдствіемъ формулы (7) является предложеніе, доказанное впервые Эйлеромъ: рядъ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots$$

расходящійся.

Слѣдующія предложенія принадлежатъ Чебышеву. Въ видахъ удобства формулировки первыхъ двухъ его предложеній введемъ нѣкоторыя обозначенія. Пусть 2, 3, 5, ... будутъ всѣ простыя числа, расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ. Условимся эти числа обозначать буквою p со значкомъ внизу, указывающимъ мѣсто, занимаемое простымъ числомъ въ рядѣ 2, 3, 5, 7, ... Такимъ образомъ

$$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=5,\quad p_4=7,\ldots\ldots$$

I Теорема. Какъ бы мало ни было число $\alpha>0$, существуетъ въ рядѣ $p_1, p_2, p_3, \ldots..$ безчисленное множество паръ такихъ послѣдовательныхъ чиселъ p_k и p_{k+1}, что

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k}<\alpha.$$

Дѣйствительно, если допустимъ противное, то начиная съ нѣкотораго значка m, мы будемъ имѣть:

$$\frac{p_{m+1}-p_m}{p_m} \geqq \alpha$$

$$\frac{p_{m+2}-p_{m+1}}{p_{m+1}} \geqq \alpha$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{p_{m+n}-p_{m+n-1}}{p_{m+n-1}} \geqq \alpha,$$

какъ бы ни было велико число n. Отсюда находимъ:

$$\frac{1}{p_m}-\frac{1}{p_{m+1}} \geqq \frac{\alpha}{p_{m+1}}$$

$$\frac{1}{p_{m+1}}-\frac{1}{p_{m+2}} \geqq \frac{\alpha}{p_{m+2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{p_{m+n-1}}-\frac{1}{p_{m+n}} \geqq \frac{\alpha}{p_{m+n}}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{p_{m+1}}+\frac{1}{p_{m+2}}+\dots+\frac{1}{p_{m+n}} \leqq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{p_{m+n}}\right),$$

какъ бы велико ни было n, что находится въ противорѣчіи съ расходимостію ряда

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\dots\dots$$

II Теорема. Какъ бы ни было велико напередъ заданное положительное число M, существуетъ въ рядѣ $p_1, p_2, \dots$ безчисленное множество паръ такихъ послѣдовательныхъ чиселъ p_k и p_{k+1}, что

$$p_{k+1}-p_k > M.$$

Допустимъ противное. Въ такомъ случаѣ, взявъ положительное число M достаточно большимъ, мы будемъ имѣть, что

$$p_1 < M$$

$$p_2-p_1 < M$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_n-p_{n-1} \leqq M,$$

какъ бы ни было велико число n. Изъ этихъ неравенствъ находимъ, что при всякомъ значкѣ k

$$p_k < kM$$

и, слѣдовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{p_k{}^{1+\rho}} > \frac{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}}{M^{1+\rho}},$$

гдѣ $\rho > 0$. Но на основаніи формулы (7) предыдущаго §

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{p_k{}^{1+\rho}}}{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}} = \frac{\log\left(\frac{1}{\rho} + f_2(\rho)\right) - f_3(\rho)}{\frac{1}{\rho} + f_2(\rho)}$$

и, слѣдовательно, какъ бы мало ни было число $\alpha > 0$ мы при достаточно маломъ положительномъ значеніи ρ, будемъ имѣть

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{p_k{}^{1+\rho}}}{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}} < \alpha,$$

между тѣмъ какъ число

$$\frac{1}{M^{1+\rho}},$$

при всѣхъ значеніяхъ $\rho \geqq 0$ но < 1 остается больше

$$\frac{1}{M^2}.$$

Слѣдовательно, наше допущеніе ошибочно и предложеніе такимъ образомъ можетъ считаться доказаннымъ. Это предложеніе можетъ быть доказано еще и иначе. Пусть M обозначаетъ любое цѣлое число большее 2. Составляемъ слѣдующій рядъ послѣдовательныхъ чиселъ, которыя очевидно всѣ составныя

$$1.2.3\ldots M+2, \quad 1.2\ldots M+3, \ldots\ldots \quad 1.2.3\ldots M+M.$$

Обозначая черезъ p' ближайшее простое число меньшее

$$1.2.3\ldots M+2$$

и черезъ p'' ближайшее простое число большее

$$1.2.3\ldots M+M,$$

мы находимъ, что послѣдовательныя простыя числа p' и p'' удовлетворяютъ условію

$$p'' - p' \geqq M.$$

Составляя число

$$1.2.3\ldots M_1 + 2, \quad 1.2.3\ldots M_1 + 3, \ldots\ldots 1.2.3\ldots M_1 + M_1,$$

гдѣ цѣлое число M_1 удовлетворяетъ условію

$$1.2\ldots M_1 + 2 > p''$$

и, слѣдовательно, $M_1 > M$, мы обнаружимъ существованіе новой пары послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ p''' и $p^{(IV)}$, удовлетворяющихъ условію

$$p^{(IV)} - p''' > M$$

и т. д. Слѣдовательно, предложеніе доказано.

III Теорема. Отъ $x = 2$ до $x = \infty$ функція $\varphi(x)$, означающая число простыхъ чиселъ меньшихъ x, удовлетворяетъ безконечное множество разъ и неравенству

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^m x} \tag{8}$$

и неравенству

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^m x}, \tag{9}$$

какъ бы α, оставаясь числомъ положительнымъ мало ни было, а m — ни было велико.

Мы ограничимся доказательствомъ неравенства (8), такъ какъ неравенство (9) доказывается подобнымъ же образомъ. Беря производныя по ρ отъ обѣихъ частей равенства (7) (предыдущій §), получаемъ слѣдующее равенство:

$$\sum_2^\infty \frac{\log p}{p^{1+\rho}} = \frac{1 - \rho^2 f_2'(\rho)}{\rho(1 + \rho f_2(\rho))} + f_3'(\rho);$$

и, слѣдовательно,

$$\sum_2^\infty \frac{\log p}{p^{1+\rho}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} = \frac{1 - \rho^2 f_2'(\rho)}{\rho(1 + \rho f_2(\rho))} + f_3'(\rho) - f_2(\rho) - \frac{1}{\rho}$$

или, что то же,

$$\sum_2^\infty \frac{\log p}{p^{1+\rho}} - \sum_{n=1}^{n=a} \frac{1}{n^{1+\rho}} = -\frac{2f_2(\rho) + \rho^2(f_2'(\rho) + [f_2(\rho)]^2)}{1 + \rho f_2(\rho)} + f_3'(\rho).$$

Принимая во вниманіе послѣднее равенство и тѣ замѣчанія, которыя нами были сдѣланы въ предыдущемъ § относительно функцій $f_2(\rho)$ и $f_3(\rho)$ и ихъ производныхъ любого порядка, мы приходимъ къ заключенію, что не только сама функція

$$f_4(\rho)=\sum_2^\infty \frac{\log p}{p^{1+\rho}}-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}},$$

но и всѣ ея производныя до какого угодно порядка m включительно при всѣхъ значеніяхъ $\rho \geqq 0$ числа конечныя. Замѣчая же, что

$$(-1)^{m-1} f_4^{(m-1)}(\rho)=\sum_2^\infty \frac{(\log p)^m}{p^{1+\rho}}-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(\log n)^{m-1}}{n^{1+\rho}}$$

и что при x равномъ простому числу

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=1$$

и при x равномъ цѣлому составному числу

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=0,$$

мы находимъ, что при всѣхъ значеніяхъ ρ большихъ 0

$$(10)\quad (-1)^{m-1} f_4^{(m-1)}(\rho)=\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}$$

— суммированіе по x въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ цѣлыя числа. Далѣе имѣемъ:

$$\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}=\frac{1}{\log x}-\frac{1}{\log(x+\vartheta)},$$

гдѣ $\vartheta>0$ но <1 и, слѣдовательно, при $x>1$.

$$\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}<\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(\log x)^2\, x^{1+\rho}}\log^m x,$$

а значитъ и по давно

$$\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}<\frac{\log^{m-2} x}{x^{2+\rho}}.$$

Отсюда заключаемъ, что при всѣхъ значеніяхъ $\rho \geqq 0$ сумма

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}},$$

гдѣ суммированіе въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ цѣлыя числа, будучи менѣе суммы

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log^{m-2} x}{x^{2+\rho}},$$

число конечное. Полагая

$$f_5(\rho)=\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{\log x}{x^{1+\rho}}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}$$

и складывая почленно послѣднее равенство съ (10) приходимъ къ слѣдующему:

$$(11)\quad (-1)^{m-1} f_4^{(m-1)}(\rho)+f_5(\rho)=\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}.$$

Послѣднее равенство опредѣляетъ сумму

$$S=\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}$$

при всякомъ значеніи $\rho>0$, а такъ какъ числовое значеніе лѣвой части этого же равенства (11) по вышедоказанному не превосходитъ нѣкотораго конечнаго числа $L>0$ при всѣхъ значеніяхъ $\rho\geqq 0$, то мы можемъ утверждать, что и числовое значеніе S не превосходитъ этого же числа L ни для какого значенія $\rho>0$. Представимъ сумму S въ слѣдующемъ видѣ:

$$S=A+\sum_{x=a+1}^{x=\infty}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}},$$

гдѣ a произвольное цѣлое число $\geqq 2$ и

$$A=\sum_{x=2}^{x=a}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}$$

и слѣдовательно число A конечное, какъ бы велико ни было цѣлое положительное число a. Обозначая черезъ t произвольное цѣлое положительное число большее

$$a+1$$

и замѣчая, что сумма

$$\sum_{x=a+1}^{x=\infty}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m dx}{x^{1+\rho}}$$

можетъ быть разсматриваема, какъ предѣлъ суммы

$$S_t=\sum_{x=a+1}^{x=t}\left(\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}$$

при предположеніи, что t стремится къ ∞, мы можемъ сумму S представить въ такой формѣ

$$(12)\qquad S=A+(\lim S_t)_{t=\infty}.$$

Допустимъ теперь, что неравенство (8) предложенной теоремы удовлетворяется только для конечнаго числа значеній x и докажемъ, что это допущеніе приведетъ насъ къ заключенію, находящемуся въ противорѣчіи съ равенствомъ (12), а именно мы докажемъ, что при такомъ допущеніи какъ бы велико ни было напередъ заданное положительное число M, при достаточно маломъ ρ и при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ t, числовое значеніе суммы S_t будетъ болѣе M. Дѣйствительно, при нашемъ допущеніи должно существовать такое положительное число b, что для всѣхъ значеній $x \geqq b$

$$(13)\qquad \int_2^x\frac{dx}{\log x}-\varphi(x)\geqq\frac{\alpha x}{\log^m x}.$$

Предположимъ далѣе, что число a задано, при чемъ мы предполагаемъ его большимъ и числа b и числа e^m (e — основаніе Нэперовыхъ логариѳмовъ). Полагая

$$\int_2^x\frac{dx}{\log x}-\varphi(x)=v_x,\quad \frac{\log^m x}{x^{1+\rho}}=u_x,$$

мы находимъ, что

$$S_t=\sum_{x=a+1}^{x=t}(v_{x+1}-v_x)\,u_x=-u_a\,v_{a+1}+u_t\,v_{t+1}-\sum_{x=a+1}^{x=t}(u_x-u_{x-1})\,v_x.$$

Замѣчая, что число $u_t\, v_{t+1}$, равное

$$\left[\int_2^{t+1} \frac{dx}{\log x} - \varphi(t+1)\right] \frac{\log^m t}{t^{1+\rho}},$$

въ силу условія

$$t > a + 1$$

и неравенство (13) положительное, заключаемъ, что

$$-S_t > -u_a\, v_{a+1} - \sum_{x=a+1}^{x=t} (u_x - u_{x-1})\, v_x$$

или, подставляя вмѣсто функціи v_x ея выраженіе

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \varphi(x)$$

и вмѣсто разности

$$u_x - u_{x-1}$$

выраженіе

$$\left[\frac{m}{\log(x-\vartheta)} - (1-\rho)\right] \frac{\log^m (x-\vartheta)}{(x-\vartheta)^{2+\rho}},$$

($\vartheta > 0$ но < 1), получаемое при помощи формулы Лагранжа,

$$(14)\quad -S_t > -u_a\, v_{a+1} + \sum_{x=a+1}^{x=t} \left(1 + \rho - \frac{m}{\log(x-\vartheta)}\right) \frac{\log^m (x-\vartheta)}{(x-\vartheta)^{2+\rho}} \left[\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \varphi(x)\right].$$

Такъ какъ по условію

$$m < \log a,$$

то въ нашихъ предѣлахъ суммированія

$$(15)\qquad 1 + \rho - \frac{m}{\log(x-\vartheta)} > 1 - \frac{m}{\log a} > 0;$$

на основаніи же неравенства (13)

$$\int_2^x \frac{dx}{\log^m x} - \varphi(x) \geqq \frac{\alpha x}{\log^m x}$$

для всѣхъ значеній x, превышающихъ b, а слѣдовательно, и для всѣхъ значеній x, превышающихъ a. Но производная

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha x}{\log^m x}\right) = \alpha\left(1 - \frac{m}{\log x}\right)\frac{1}{\log^m x}$$

для всѣхъ значеній $x \geqq a$ число положительное, слѣдовательно, въ нашихъ предѣлахъ суммированія

$$\frac{\alpha x}{\log^m x} > \frac{\alpha (x-\vartheta)}{\log^m (x-\vartheta)},$$

а потому и

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \varphi(x) > \frac{\alpha (x-\vartheta)}{\log^m (x-\vartheta)}.$$

Принимая во вниманіе послѣднее неравенство и неравенства (15) и (14), находимъ, что

$$-S_t > -u_a v_{a+1} + \alpha \left(1 - \frac{m}{\log a}\right) \sum_{x=a+1}^{x=t} \frac{1}{(x-\vartheta)^{1+\rho}}.$$

Замѣчая же, что сумма

$$\sum_{x=a+1}^{x=t} \frac{1}{(x-\vartheta)^{1+\rho}}$$

болѣе суммы

$$\sum_{x=a+1}^{x=t} \frac{1}{x^{1+\rho}},$$

которая, въ силу расходимости ряда

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \ldots,$$

при достаточно маломъ значеніи $\rho > 0$ и при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ t можетъ превзойти любое напередъ заданное положительное число, какъ бы велико оно ни было и принимая во вниманіе, что число

$$-u_a v_{a+1}$$

конечное и

$$\alpha\left(1 - \frac{m}{\log a}\right) > 0,$$

мы заключаемъ, что числовое значеніе суммы S_t при достаточно большихъ значеніяхъ t можетъ превзойти любое напередъ заданное положительное число M, какъ бы велико послѣднее ни было, а это и обнаруживаетъ ошибочность сдѣланнаго предположенія.

Въ томъ же мемуарѣ Чебышева, изъ котораго мы заимствовали доказанную теорему, устанавливающую нѣкоторую связь между функціей $\varphi(x)$ и интеграломъ

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

мы находимъ еще слѣдующія три теоремы, доказывающіяся на основаніи предыдущей, которыя однако представляютъ меньшій интересъ, чѣмъ предыдущія, такъ какъ въ нихъ идетъ рѣчь о такихъ свойствахъ функціи $\varphi(x)$, которыя справедливы лишь при нѣкоторыхъ допущеніяхъ. Эти три предложенія мы приведемъ безъ доказательствъ.

IV Теорема. Если при безпредѣльномъ возрастаніи x выраженіе

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$$

стремится къ конечному предѣлу, то этотъ предѣлъ равенъ -1.

V Теорема. Если при безпредѣльномъ возрастаніи x выраженіе

$$\frac{\log^m x}{x}\left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right),$$

гдѣ $f(x)$ обозначаетъ данную функцію отъ x, стремится къ предѣлу $L \gtrless 0$ (значенія $\pm\infty$ не исключаются) и если существуетъ предѣлъ для выраженія

$$\frac{\log^m x}{x}\left(\varphi(x) - f(x)\right)$$

при $x = \infty$, то этотъ предѣлъ не равенъ 0.

Замѣчаніе. Чебышевъ, сравнивая перемѣнное число X съ числами

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \ldots\ldots \frac{x}{\log^m x}, \ldots\ldots$$

называетъ X количествомъ порядка m, если при всѣхъ значеніяхъ $n < m$ будемъ имѣть

$$\lim \frac{X \log^n x}{x} = 0,$$

а при всѣхъ значеніяхъ $n > m$

$$\lim \frac{X \log^n x}{x} = \infty.$$

Такимъ образомъ при условіяхъ теоремы разность

$$f(x) - \varphi(x)$$

есть количество порядка не выше m.

VI Теорема. Если существуетъ функція $F(x)$, алгебраическая относительно x, $\log x$ и e^x, для которой порядокъ разности

$$F(x) - \varphi(x)$$

болѣе или равенъ $m+1$, то она можетъ быть представлена въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1.x}{\log^2 x}+\frac{1.2.x}{\log^3 x}+\ldots+\frac{1.2..(m-1)\,x}{\log^m x}+F_1(x),$$

при чемъ порядокъ функціи $F_1(x)$ болѣе или равенъ $m+1$.

Каждую функцію $F(x)$, удовлетворяющую условію

$$\lim \frac{\log^m x}{x}\big(F(x)-\varphi(x)\big)=0,$$

гдѣ m цѣлое число $\geqq 1$ Чебышевъ называетъ функціей, выражающей функцію $\varphi(x)$ вѣрно до количествъ порядка не ниже m. Изъ послѣдней теоремы вытекаетъ, что если $F(x)$, удовлетворяющая этому условію, есть алгебраическая относительно x, $\log x$ и e^x, то и функція

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1.x}{\log^2 x}+\ldots+\frac{1.2..(m-1)\,x}{\log^m x}$$

выражаетъ функцію $\varphi(x)$ вѣрно до порядка m включительно. Замѣчая же, что выраженіе

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1.x}{\log^2 x}+\ldots+\frac{1.2..(m-1)\,x}{\log^m x}-\int_2^x\frac{dx}{\log^m x}$$

есть количество порядка

$$m+1,$$

Чебышевъ заключаетъ, что интегралъ

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

будетъ выражать функцію $\varphi(x)$ вѣрно до количествъ такого порядка, до какого она способна выразиться алгебраически въ x, $\log x$ и e^x.

§ 7. Двѣ другія формулы Эйлера, выведенныя нами въ § 2, даютъ возможность доказать нѣкоторыя предложенія относительно простыхъ чиселъ, заключающихся въ слѣдующихъ формахъ

$$4m+1,\quad 4m+3,\quad 6m+1 \quad \text{и} \quad 6m+5.$$

Условимся обозначать каждое изъ простыхъ чиселъ формы

$$4m+1$$

черезъ p', а каждое изъ простыхъ чиселъ формы

$$4m+3$$

черезъ p''. Докажемъ, что ряды

$$\sum_{5}^{\infty} \frac{1}{p'} = \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots.$$

$$\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{p''} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots.$$

расходящіеся. Дѣйствительно, оба ряда сходящимися одновременно быть не могутъ, такъ какъ тогда и рядъ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots.$$

былъ бы сходящимся. Слѣдовательно, или оба они расходящіеся или одинъ изъ нихъ, напр.

$$\sum_{5}^{\infty} \frac{1}{p'}$$

расходящійся, а другой

$$\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{p''}$$

сходящійся. Допустимъ послѣднее. Разлагая въ правой части равенства (4) § 3 каждый изъ логариѳмовъ въ рядъ, мы приходимъ къ слѣдующему равенству:

$$(a) \qquad \sum_{3}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{p^{1+\rho}} + \varphi_1(\rho) = \log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{5^{1+\rho}} - \frac{1}{7^{1+\rho}} + \frac{1}{9^{1+\rho}} \ldots\right),$$

гдѣ

$$\varphi_1(\rho) = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{p^{2(1+\rho)}} + \frac{1}{3} \sum \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{p^{3(1+\rho)}} + \frac{1}{4} \sum \frac{1}{p^{4(1+\rho)}} + \ldots$$

число конечное для всѣхъ значеній $\rho \geqq 0$. Равенство (a) можетъ быть для всѣхъ значеній $\rho > 0$ представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{5}^{\infty} \frac{1}{p'^{\,1+\rho}} - \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{p''^{\,1+\rho}} + \varphi_1(\rho) = \log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{5^{1+\rho}} \ldots\right).$$

Такъ какъ рядъ

$$\sum_{5}^{\infty} \frac{1}{p'}$$

по условію расходящійся, то какъ бы ни было велико положительное число N, при всѣхъ достаточно малыхъ значеніяхъ $\rho > 0$, будетъ имѣть:

$$\sum_5^\infty \frac{1}{p'^{\,1+\rho}} > N,$$

между тѣмъ какъ при всякомъ значеніи $\rho > 0$ числа

$$\varphi_1(\rho), \quad \sum_3^\infty \frac{1}{p''^{\,1+\rho}} \quad \text{и} \quad \log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{5^{1+\rho}} \ldots\right)$$

не превосходятъ нѣкотораго конечнаго числа A, такъ какъ рядъ

$$\sum_3^\infty \frac{1}{p''}$$

по предположенію сходящійся, а число

$$\log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{5^{1+\rho}} - \frac{1}{7^{1+\rho}} + \ldots\right)$$

при всякомъ значеніи $\rho > 0$ заключается между

$$0 \quad \text{и} \quad \log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}}\right),$$

а, слѣдовательно, и подавно между

$$0 \quad \text{и} \quad \log\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Такимъ образомъ сдѣланное нами выше предположеніе о расходимости только одного изъ рядовъ

$$\sum_5^\infty \frac{1}{p'}, \quad \sum_3^\infty \frac{1}{p''}$$

привело насъ къ противорѣчію. Слѣдовательно, оба ряда

$$\sum_5^\infty \frac{1}{p'}, \quad \sum_3^\infty \frac{1}{p''}$$

расходящіеся. Исходя изъ формулы (5) § 4 и разсуждая совершенно также, мы доказали бы расходимость и двухъ слѣдующихъ рядовъ:

$$\sum_7^\infty \frac{1}{q'} = \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \ldots\ldots \frac{1}{q'} + \ldots\ldots$$

$$\sum_5^\infty \frac{1}{q''} = \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{17} + \ldots\ldots \frac{1}{q''} + \ldots\ldots$$

— въ первомъ изъ нихъ суммированіе распространено на всѣ простыя числа формы

$$6m+1,$$

а во второмъ — на всѣ простыя числа формы

$$6m+5.$$

§ 8. Очевиднымъ слѣдствіемъ доказанныхъ нами въ предыдущемъ § предложеній является такое предложеніе: въ каждой изъ линейныхъ формъ

$$4m+1,\quad 4m+3,\quad 6m+1,\quad 6m+5$$

заключается безчисленное множество простыхъ чиселъ. Въ настоящемъ § мы дадимъ доказательство подобныхъ предложеній еще для нѣкоторыхъ линейныхъ формъ, при чемъ тотъ пріемъ доказательство, которымъ мы будемъ пользоваться, аналогиченъ съ извѣстнымъ пріемомъ доказательства Эвклида, даннымъ послѣднимъ для предложенія о безпредѣльности числа всѣхъ простыхъ чиселъ.

I Теорема. Простыхъ чиселъ, заключающихся въ линейной формѣ

$$ax+1,$$

гдѣ a цѣлое положительное число, безчисленное множество.

Пусть $d_1, d_2, \ldots d_m$ будутъ всѣ дѣлители числа a за исключеніемъ его самого и пусть $f(x)$ будетъ общій наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ функцій

$$x^a-1 \quad \text{и} \quad F(x)=(x^{d_1}-1)(x^{d_2}-1)\ldots(x^{d_m}-1).$$

Имѣемъ:

$$(a)\ x^a-1=f(x)\,f_1(x),$$

гдѣ $f(x)$ и $f_1(x)$ цѣлые полиномы съ цѣлыми коэффиціентами и полиномъ $f_1(x)$ не постоянное число, такъ какъ уравненіе

$$x^a-1=0$$

имѣетъ и такіе корни (первообразные), которые не принадлежатъ ни одному изъ уравненій

$$x^{d_1}-1=0,\quad x^{d_2}-1=0,\ldots\ldots x^{d_m}-1=0.$$

Замѣчая, что всѣ функціи

$$\frac{x^a-1}{x^{d_1}-1},\quad \frac{x^a-1}{x^{d_2}-1},\ \ldots\ \frac{x^a-1}{x^{d_m}-1}$$

цѣлыя и что полиномъ $f_1(x)$ взаимно простой съ каждой изъ функцій

$$x^{d_1}-1,\quad x^{d_2}-1,\ldots x^{d_m}-1,$$

мы заключаемъ, что всѣ функціи

$$\frac{f(x)}{x^{d_1}-1},\quad \frac{f(x)}{x^{d_2}-1},\ldots \frac{f(x)}{x^{d_m}-1}$$

цѣлыя. Далѣе, пусть A обозначаетъ цѣлое число (не 0), удовлетворяющее двумъ условіямъ: 1) A дѣлится на a и 2) число $f_1(A)$ не равно 1. Такихъ чиселъ A существуетъ безчисленное множество. Замѣняя въ тождествѣ (a) x черезъ A, находимъ, что

$$A^a-1=f(A)\,f_1(A).$$

Докажемъ, что цѣлое число $f_1(A)$ взаимно простое съ каждымъ изъ чиселъ

$$A^{d_1}-1,\quad A^{d_2}-1,\ldots\ldots A^{d_m}-1$$

и что всѣ простые дѣлители числа $f_1(A)$ заключаются въ формѣ

$$ax+1,$$

гдѣ x число цѣлое. Дѣйствительно, полагая

$$a=d_k b,$$

находимъ, что числа

$$\frac{A^a-1}{A^{d_k}-1}=A^{(b-1)d_k}+A^{(b-2)d_k}+\ldots\ldots+A^{d_k}+1$$

и

$$A^{d_k}-1$$

взаимно простыя, такъ какъ

$$A^{(b-1)d_k}+A^{(b-2)d_k}+\ldots+A^{d_k}+1=(A^{d_k}-1)\,B+b,$$

гдѣ B обозначаетъ нѣкоторое цѣлое и число b, будучи дѣлителемъ числа a, и слѣдовательно, дѣлителемъ числа A, взаимно простое съ числомъ

$$A^{d_k}-1$$

Но

$$\frac{A^a-1}{A^{d_k}-1}=\frac{f(A)}{A^{d_k}-1}\,f_1(A),$$

гдѣ

$$\frac{f(A)}{A^{d_k}-1}$$

число цѣлое, слѣдовательно, $f_1(A)$ число взаимно простое съ

$$A^{d_k} - 1.$$

Пусть p обозначаетъ любой простой дѣлитель числа $f_1(A)$. Извѣстно, что если число A удовлетворяетъ сравненію

$$x^a - 1 \equiv 0 \; (\text{Mod } p),$$

то оно должно удовлетворять и сравненію

$$x^d - 1 \equiv 0 \; (\text{Mod } p),$$

гдѣ d общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и $p-1$ и, слѣдовательно, d равно одному изъ чиселъ

$$d_1, \quad d_2, \ldots d_m, \quad a;$$

а такъ какъ по доказанному ни одно изъ чиселъ

$$A^{d_1} - 1, \quad A^{d_2} - 1, \ldots A^{d_m} - 1$$

не дѣлится на p, то, слѣдовательно,

$$d = a,$$

а потому

$$p = at + 1,$$

гдѣ t обозначаетъ цѣлое число. Пусть далѣе $q_1, q_2, \ldots q_n$ будутъ всѣ по порядку ихъ величинъ простыя числа, заключающіяся въ линейной формѣ

$$ax + 1$$

(существованіе ихъ нами доказано) и пусть A обозначаетъ цѣлое число (не 0), удовлетворяющее двумъ условіямъ: 1) A дѣлится на произведеніе

$$aq_1 q_2 \ldots q_n$$

и 2) числовое значеніе $f_1(A)$ не равно 1. Тогда по доказанному число

$$A^a - 1$$

должно имѣть по крайней мѣрѣ одного простого дѣлителя формы

$$ax + 1,$$

а такъ какъ этотъ дѣлитель не равенъ ни одному изъ чиселъ

$$q_1,\ q_2,\ \dots\ q_n,$$

то, слѣдовательно, неограниченность ряда простыхъ чиселъ, заключающихся въ линейной формѣ

$$ax+1$$

нами доказана. Въ частномъ случаѣ, когда a простое число, эта теорема была доказана Serret.

II Теорема. Простыхъ чиселъ формы

$$8m+3$$

безчисленное множество. Пусть

$$P=3.11\dots.p,$$

гдѣ 3, 11, .. p всѣ по порядку простыя числа формы

$$8m+3.$$

Замѣчая, что если простое число q есть дѣлитель числа

$$P^2+2,$$

то символъ Лежандра $\left(\frac{-2}{q}\right)$ равенъ 1, мы заключаемъ, что всѣ простые дѣлители числа

$$N=P^2+2$$

заключаются въ одной изъ двухъ формъ

$$8m+1,\quad 8m+3.$$

Но такъ какъ само число N имѣетъ форму

$$8m+3,$$

то по крайней мѣрѣ одинъ изъ дѣлителей этого числа долженъ быть этой же формы. Принимая во вниманіе, что онъ не равенъ ни одному изъ чиселъ 3, 11, .. p, мы заключаемъ, что теорема нами доказана.

III Теорема. Простыхъ чиселъ формы

$$8m+5,$$

безчисленное множество.

Полагая

$$P = 5.13 \ldots p,$$

гдѣ 5, 13, .. p всѣ по порядку простыя числа формы

$$8m + 5,$$

составляемъ число

$$P^2 + 2^2,$$

которое заключается въ формѣ

$$8m + 5$$

и простые дѣлители котораго могутъ заключаться только въ формахъ

$$8m + 1, \quad 8m + 5$$

Дальнѣйшія разсужденія тѣ-же, что и при доказательствѣ предыдущей теоремы.

IV Теорема. Простыхъ чиселъ формы

$$8m + 7$$

безчисленное множество. Для доказательства составляемъ число

$$P^2 - 2,$$

гдѣ

$$P = 7.23 \ldots p$$

и 7, 23, . . . p всѣ по порядку простыя числа формы

$$8m + 7.$$

Всѣ простые дѣлители числа N могутъ заключаться только въ формахъ

$$8m + 1, \quad 8m + 7$$

и само оно имѣетъ форму

$$8m + 7.$$

Дальнѣйшія заключенія очевидны.

V Теорема. Простыхъ чиселъ формы

$$12m + 5$$

безчисленное множество. Къ доказательству этого предложенія придемъ изъ разсмотрѣнія простыхъ дѣлителей числа

$$P^2 + 2^2,$$

гдѣ

$$P = 5 . 17 \ldots . p$$

и 5, 17, . . p всѣ по порядку простыя числа формы

$$12m + 5.$$

VI Теорема. Простыхъ чиселъ формы

$$12m + 7$$

безчисленное множество.

Въ этомъ случаѣ полагаемъ

$$P = 2 . 7 . 19 . . p,$$

гдѣ 7, 19, . . . p всѣ по порядку простыя числа формы

$$12m + 7$$

и составляемъ число

$$P^2 + 3.$$

Дальнѣйшія заключенія очевидны.

VII Теорема. Простыхъ чиселъ формы

$$12m + 11$$

безчисленное множество. Полагаемъ

$$P = 11 . 23 . . p$$

и составляемъ число

$$P^2 - 3,$$

имѣющее форму

$$2\,(12m + 11).$$

Дальнѣйшихъ разсужденій, какъ очевидныхъ, не приводимъ.

ГЛАВА II.

Неравенства для суммъ логариѳмовъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ заданнаго предѣла. Слѣдствія этихъ неравенствъ. Формулы Мертенса.

---

§ 9. Пусть a обозначаетъ произвольное число большее 1. Далѣе, пусть $\vartheta(z)$ обозначаетъ функцію, опредѣляющуюся для всѣхъ положительныхъ значеній z слѣдующимъ образомъ: если

$$0 < z < 2,$$

то

$$\vartheta(z) = 0;$$

если же

$$z \geqq 2,$$

то $\vartheta(z)$ есть сумма логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, не превышающихъ числа z. Кромѣ того условимся выраженія вида

$$\vartheta\left(\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

которыя намъ встрѣтятся, обозначать проще такъ

$$\vartheta\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда, положивъ

(1) $$\psi(a) = \vartheta(a) + \vartheta(a^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(a^{\frac{1}{3}}) + \vartheta(a^{\frac{1}{4}}) + \ldots.$$

и

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots + \log E(a) = T(a),$$

будемъ имѣть:

(2) $$T(a) = \psi(a) + \psi\left(\frac{a}{2}\right) + \psi\left(\frac{a}{3}\right) + \psi\left(\frac{a}{4}\right) + \ldots\ldots$$

Для вывода этой формулы, которая является исходной въ дальнѣйшихъ изысканіяхъ П. Л. Чебышева о простыхъ числахъ (мемуаръ «о простыхъ числахъ»; Сочиненія П. Л. Чебышева, т. I) мы обращаемся къ его формулѣ (2), выведенной нами въ предыдущей главѣ (§ 1), и опредѣляемъ функцію $f(x)$ для всѣхъ значеній $x \geqq 1$ слѣдующимъ образомъ: $f(x)$ имѣетъ значеніе равное 0, если $x > a$ и значеніе равное 1, если $x \leqq a$. При такомъ опредѣленіи $f(x)$ мы находимъ, что

$$F(p) = E\frac{a}{p} + E\frac{a}{p^2} + E\frac{a}{p^3} + \ldots\ldots + E\frac{a}{p^\lambda},$$

гдѣ число λ удовлетворяетъ условіямъ

$$p^\lambda \leqq a < p^{\lambda+1}$$

и формула (2) § 1 принимаетъ слѣдующій видъ:

$$(3)\quad T(a) = \log 2 + \log 3 + \ldots + \log Ea = \sum\left(E\frac{a}{p} + E\frac{a}{p^2} + \ldots + E\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p,$$

гдѣ суммированіе во второй части распространено на всѣ простыя числа, не превышающія a. Замѣчая, что въ сумму

$$\vartheta(a) + \vartheta\left(\frac{a}{2}\right) + \vartheta\left(\frac{a}{3}\right) + \ldots.$$

$\log p$ входитъ съ коэффиціентомъ

$$E\frac{a}{p},$$

въ сумму

$$\vartheta(a^{\frac{1}{2}}) + \vartheta\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \vartheta\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

— съ коэффиціентомъ

$$E\frac{a}{p^2}$$

и вообще въ сумму

$$\vartheta(a^{\frac{1}{k}}) + \vartheta\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{k}} + \ldots\ldots$$

— съ коэффиціентомъ

$$E\frac{a}{p^k},$$

мы заключаемъ, что

$$\sum\left(E\frac{a}{p} + E\frac{a}{p^2} + \ldots + E\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p = \psi(a) + \psi\left(\frac{a}{2}\right) + \psi\left(\frac{a}{3}\right) + \ldots.$$

и, слѣдовательно, справедливость формулы (2) доказано. Для дальнѣйшаго введемъ еще слѣдующія обозначенія:

$$\psi(a)+\psi\left(\frac{a}{2}\right)+\psi\left(\frac{a}{3}\right)+\ldots=\sum\psi\left(\frac{a}{n}\right)$$

$$\psi\left(\frac{a}{2}\right)+\psi\left(\frac{a}{4}\right)+\psi\left(\frac{a}{6}\right)+\ldots=\sum\psi\left(\frac{a}{2n}\right)$$

$$\psi\left(\frac{a}{3}\right)+\psi\left(\frac{a}{6}\right)+\psi\left(\frac{a}{9}\right)+\ldots=\sum\psi\left(\frac{a}{3n}\right)$$

$$\psi\left(\frac{a}{5}\right)+\psi\left(\frac{a}{10}\right)+\psi\left(\frac{a}{15}\right)+\ldots=\sum\psi\left(\frac{a}{5n}\right)$$

$$\psi\left(\frac{a}{30}\right)+\psi\left(\frac{a}{60}\right)+\psi\left(\frac{a}{90}\right)+\ldots=\sum\psi\left(\frac{a}{30n}\right).$$

На основаніи формулы (2) имѣемъ:

$$(4)\quad \begin{cases} T(a)+T\left(\frac{a}{30}\right)-T\left(\frac{a}{2}\right)-T\left(\frac{a}{3}\right)-T\left(\frac{a}{5}\right)= \\ \sum\psi\left(\frac{a}{n}\right)+\sum\psi\left(\frac{a}{30n}\right)-\sum\psi\left(\frac{a}{2n}\right)-\sum\psi\left(\frac{a}{3n}\right)-\sum\psi\left(\frac{a}{5n}\right)= \\ A_1\,\psi(a)+A_2\,\psi\left(\frac{a}{2}\right)+A_3\,\psi\left(\frac{a}{3}\right)+A_4\,\psi\left(\frac{a}{4}\right)+\ldots, \end{cases}$$

гдѣ коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots$ могутъ имѣть только значенія 0, 1 и —1. Опредѣлимъ ихъ. Пусть A_k обозначаетъ любой изъ нихъ. Представимъ число k въ слѣдующей формѣ:

$$k=2^{n_1}\,3^{n_2}\,5^{n_3}\,Q,$$

гдѣ $n_1\geq 0$, $n_2\geq 0$, $n_3\geq 0$ цѣлыя числа и $Q\geq 1$ цѣлое число, взаимно простое съ 30. Если

$$n_1=n_2=n_3=0,$$

то $\psi\left(\frac{a}{k}\right)$ входитъ только въ сумму.

$$\sum\psi\left(\frac{a}{n}\right)$$

и, слѣдовательно, $A_k=1$. Если только два изъ трехъ показателей n_1, n_2, n_3 равны 0, то $\psi\left(\frac{a}{k}\right)$ входитъ въ сумму

$$\sum\psi\left(\frac{a}{n}\right)$$

и въ одну изъ суммъ

$$\sum\psi\left(\frac{a}{2n}\right),\quad \sum\psi\left(\frac{a}{3n}\right),\quad \sum\psi\left(\frac{a}{5n}\right)$$

и, слѣдовательно, коэффиціентъ A_k равенъ 0. Если только одинъ изъ показателей n_1, n_2, n_3 равенъ 0, то $\psi\left(\frac{a}{k}\right)$ входитъ въ сумму

$$\sum \psi\left(\frac{a}{n}\right)$$

и въ двѣ изъ суммъ

$$\sum \psi\left(\frac{a}{2n}\right), \quad \sum \psi\left(\frac{a}{3n}\right), \quad \sum \psi\left(\frac{a}{3n}\right),$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ $A_k = -1$. Наконецъ, если ни одинъ изъ показателей n_1, n_2, n_3 не равенъ 0, то $\psi\left(\frac{a}{k}\right)$ входитъ во всѣ наши суммы, а слѣдовательно и въ этомъ случаѣ $A_k = -1$. Итакъ,

$$\begin{array}{llllll}
A_1 = 1, & A_2 = 0, & A_3 = 0, & A_4 = 0, & A_5 = 0, & A_6 = -1, \\
A_7 = 1, & A_8 = 0, & A_9 = 0, & A_{10} = -1, & A_{11} = 1, & A_{12} = -1, \\
A_{13} = 1, & A_{14} = 0, & A_{15} = -1, & A_{16} = 0, & A_{17} = 1, & A_{18} = -1, \\
A_{19} = 1, & A_{20} = -1, & A_{21} = 0, & A_{22} = 0, & A_{23} = 1, & A_{24} = -1, \\
A_{25} = 0, & A_{26} = 0, & A_{27} = 0, & A_{28} = 0, & A_{29} = 1, & A_{30} = -1, \\
A_{31} = A_1, & A_{32} = A_2, & A_{33} = A_3, \ldots\ldots\ldots & & &
\end{array}$$

и формула (4) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T(a) + T\left(\frac{a}{30}\right) - T\left(\frac{a}{2}\right) - T\left(\frac{a}{3}\right) - T\left(\frac{a}{5}\right) = \\ \qquad \psi(a) - \psi\left(\frac{a}{6}\right) + \psi\left(\frac{a}{7}\right) - \psi\left(\frac{a}{10}\right) + \psi\left(\frac{a}{11}\right) \ldots . \end{array} \right.$$

Принимая во вниманіе, что функція $\psi(z)$ съ убываніемъ перемѣнной не возрастаетъ, мы изъ послѣдняго равенства находимъ, что

$$(5) \qquad \psi(a) \geqq T(a) + T\left(\frac{a}{30}\right) - T\left(\frac{a}{2}\right) - T\left(\frac{a}{3}\right) - T\left(\frac{a}{5}\right)$$

$$(6) \qquad \psi(a) - \psi\left(\frac{a}{6}\right) \leqq T(a) + T\left(\frac{a}{30}\right) - T\left(\frac{a}{2}\right) - T\left(\frac{a}{3}\right) - T\left(\frac{a}{5}\right).$$

Но извѣстно, что

$$T(a) > \log \sqrt{2\pi} + a \log a - a - \frac{1}{2} \log a$$

$$T(a) < \log \sqrt{2\pi} + a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12},$$

слѣдовательно, предполагая $a > 30$, найдемъ:

$$T(a)+T\left(\frac{a}{30}\right)>2\log\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}a\log a-\left(\frac{31+\log 30}{30}\right)a-\log a+\frac{1}{2}\log 30$$

$$T(a)+T\left(\frac{a}{30}\right)<2\log\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}a\log a-\left(\frac{31+\log 30}{30}\right)a+\log a-\frac{1}{2}\log 30+\frac{1}{6}$$

и

$$T\left(\frac{a}{2}\right)+T\left(\frac{a}{3}\right)+T\left(\frac{a}{5}\right)<3\log\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}a\log a-$$

$$\left(\frac{31}{30}+\log 2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{5}}\right)a+\frac{3}{2}\log a-\frac{1}{2}\log 30+\frac{1}{4}$$

$$T\left(\frac{a}{2}\right)+T\left(\frac{a}{3}\right)+T\left(\frac{a}{5}\right)>3\log\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}a\log a-$$

$$\left(\frac{31}{30}+\log 2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{5}}\right)a-\frac{3}{2}\log a+\frac{1}{2}\log 30,$$

а потому

$$\psi(a)>-\log\sqrt{2\pi}+\frac{\log 2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{5}}}{\log 30^{\frac{1}{30}}}a-\frac{5}{2}\log a-\frac{1}{4}+\log 30$$

$$\psi(a)-\psi\left(\frac{a}{6}\right)<-\log\sqrt{2\pi}+\frac{\log 2^{\frac{1}{2}}\log 3^{\frac{1}{3}}\log 5^{\frac{1}{5}}}{\log 30^{\frac{1}{30}}}a+\frac{5}{2}\log a+\frac{1}{6}-\log 30,$$

а потому и по давно

$$\psi(a)>Aa-\frac{5}{2}\log a-1 \tag{7}$$

$$\psi(a)-\psi\left(\frac{a}{6}\right)<Aa+\frac{5}{2}\log a, \tag{8}$$

гдѣ

$$A=\frac{\log 2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{5}}}{\log 30^{\frac{1}{30}}}=0{,}92129202\ldots\ldots$$

Замѣчаніе. Неравенства (7) и (8) выведены при предположеніи, что $a>30$, но они справедливы и для всѣхъ значеній $a\geq 2$ — въ этомъ можно убѣдиться непосредственной ихъ повѣркой.

§ 10. Подберемъ въ функціи

$$F(z)=Bz+B_1\log^2 z+B_2\log z$$

коэффиціенты B, B_1, B_2 такимъ образомъ, чтобы имѣло мѣсто тождество

$$F(z)-F\left(\frac{z}{6}\right)=Az+\frac{5}{2}\log z.$$

Найдемъ

$$B=\frac{6}{5}A,\quad B_1=\frac{5}{4\log 6},\quad B_2=\frac{5}{4}.$$

При такомъ выборѣ $F(z)$ будемъ имѣть на основаніи неравенства (8) предыдущаго §

$$\psi(a)-\psi\left(\frac{a}{6}\right)<F(a)-F\left(\frac{a}{6}\right)$$

и слѣдовательно,

$$\psi(a)-F(a)<\psi\left(\frac{a}{6}\right)-F\left(\frac{a}{6}\right)$$

$$\psi\left(\frac{a}{6}\right)-F\left(\frac{a}{6}\right)<\psi\left(\frac{a}{6^2}\right)-F\left(\frac{a}{6^2}\right)$$

. . . .

$$\psi\left(\frac{a}{6^{m-1}}\right)-F\left(\frac{a}{6^{m-1}}\right)<\psi\left(\frac{a}{6^m}\right)-F\left(\frac{a}{6^m}\right),$$

а потому

$$\psi(a)-F(a)<\psi\left(\frac{a}{6^m}\right)-F\left(\frac{a}{6^m}\right).$$

Предполагая цѣлое положительное число m выбраннымъ такъ, что

$$1<\frac{a}{6^m}<2,$$

и замѣчая, что тогда

$$\psi\left(\frac{a}{6^m}\right)=0,$$

находимъ такое неравенство:

$$\psi(a)-F(a)<-F\left(\frac{a}{6^m}\right).$$

Такъ какъ

$$-F(z)=\frac{5\log 6}{16}-\frac{5}{4\log 6}\left(\log z+\frac{1}{2}\log 6\right)^2-\frac{6}{5}Az$$

и значитъ

$$-F(z)\not<\frac{5\log 6}{16}<1,$$

то, слѣдовательно,

$$\psi(a)<\frac{6}{5}Aa+\frac{5}{4\log 6}\log^2 a+\frac{5}{4}\log a+1. \tag{9}$$

Послѣднее неравенство и неравенство (7) предыдущаго § даютъ возможность установить два неравенства и для функціи $\vartheta(a)$. Дѣйствительно, функція $\psi(a)$ опредѣляется равенствомъ

$$\psi(a)=\vartheta(a)+\vartheta(a^{\frac{1}{2}})+\vartheta(a^{\frac{1}{3}})+\ldots,$$

слѣдовательно,

$$\psi(a) - \psi(a^{\frac{1}{2}}) = \vartheta(a) + \vartheta(a^{\frac{1}{3}}) + \vartheta(a^{\frac{1}{5}}) + \ldots .$$

$$\psi(a) - 2\,\psi(a^{\frac{1}{2}}) = \vartheta(a) - \vartheta(a^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(a^{\frac{1}{3}}) - \vartheta(a^{\frac{1}{4}}) + \ldots ,$$

а потому

$$\vartheta(a) \leqq \psi(a) - \psi(a^{\frac{1}{2}}) \tag{10}$$

и

$$\vartheta(a) \geqq \psi(a) - 2\,\psi(a^{\frac{1}{2}}), \tag{11}$$

такъ какъ

$$\vartheta(a) \geqq \vartheta(a^{\frac{1}{2}}) \geqq \vartheta(a^{\frac{1}{3}}) \ldots .$$

Принимая во вниманіе неравенства (7) предыдущаго § и (9), (10) и (11) настоящаго приходимъ къ двумъ слѣдующимъ неравенствамъ для функціи $\vartheta(a)$:

$$\vartheta(a) < \frac{6}{5} Aa - Aa^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a + \frac{5}{2} \log a + 2 \tag{12}$$

$$\vartheta(a) > Aa - \frac{12}{5} Aa^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 a - \frac{15}{4} \log a - 3. \tag{13}$$

Замѣчаніе. Для дальнѣйшаго замѣтимъ, что на основаніи неравенства (9) для всѣхъ значеній $a \geqq 2$ имѣемъ, что $\psi(a)$ a, слѣдовательно, и подавно, $\vartheta(a)$ менѣе $2a$.

§ 11. Обозначимъ правую часть неравенства (12) черезъ $\vartheta_{\text{I}}(a)$, а правую часть неравенства (13) — черезъ $\vartheta_{\text{II}}(a)$. Пусть далѣе l и L обозначаютъ два числа, удовлетворяющія условіямъ

$$1 \leqq l < L$$

и пусть число простыхъ чиселъ превышающихъ l, но непревышающихъ L будетъ m. Тогда, очевидно, имѣемъ:

$$m \log l < \vartheta(L) - \vartheta(l)$$

$$m \log L > \vartheta(L) - \vartheta(l),$$

а, слѣдовательно, и по давно

$$m \log l < \vartheta_1 (L) - \vartheta_{11} (l)$$

$$m \log L > \vartheta_{11} (L) - \vartheta_1 (l).$$

Отсюда имѣемъ для числа m слѣдующія два неравенства:

$$m < \frac{A\left(\frac{6}{5} L - l\right) - A\left(L^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5} l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8 \log 6}\left(2 \log^2 L + \log^2 l\right) + \frac{5}{4}\left(2 \log L + 3 \log l\right) + 5}{\log l}$$

$$m > \frac{A\left(L - \frac{6}{5} l\right) - A\left(\frac{12}{5} L^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8 \log 6}\left(\log^2 L + 2 \log^2 l\right) - \frac{5}{4}\left(3 \log L + 2 \log l\right) - 5}{\log L}.$$

Такъ какъ число k, опредѣляемое равенствомъ:

$$k = \frac{A\left(L - \frac{6}{5} l\right) - \frac{12}{5} L^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{8 \log 6} \log^2 L - \frac{25}{4} \log L - 5}{\log L},$$

очевидно менѣе m, то слѣдовательно, положивъ

$$l = \frac{5}{6} L - 2 L^{\frac{1}{2}} - \frac{25}{A\, 16 \log 6} \log^2 L - \frac{5}{6A}\left(k + \frac{25}{4}\right) \log L - \frac{25}{6A},$$

мы можемъ утверждать, что число простыхъ чиселъ большихъ l, но непревышающихъ L больше k.

Въ частномъ случаѣ, когда k равно 0, мы имѣемъ, что при

$$l = \frac{5}{6} L - 2 L^{\frac{1}{2}} - \frac{25}{A\, 16 \log 6} \log^2 L - \frac{125}{4} \log L - 5$$

между l и L находится по крайней мѣрѣ одно простое число. Слѣдствіемъ тѣхъ же неравенствъ (12) и (13) является слѣдующая, весьма важная теорема П. Л. Чебышева.

§ 12. *Теорема.* Если x обозначаетъ положительное число и если $F(x)$ при всѣхъ значеніяхъ x, превосходящихъ нѣкоторый опредѣленный предѣлъ, остается числомъ положительнымъ, то сходимость ряда

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \ldots\ldots$$

есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобы рядъ

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \ldots\ldots$$

былъ также сходящійся.

Доказательство. Замѣчая, что разность

$$\vartheta(m) - \vartheta(m-1),$$

гдѣ m цѣлое положительное число, равна 0 или $\log m$, смотря по тому — составное или простое число m, имѣемъ:

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \ldots = \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{\vartheta(m) - \vartheta(m-1)}{\log m} F(m).$$

Далѣе, обозначая черезъ n такое достаточно большое цѣлое положительное число, что во 1) для всѣхъ значеній $x \geqq n$ функція $F(x)$ имѣетъ положительное значеніе и во 2) если

$$x' > x \geqq n,$$

то

$$\frac{F(x')}{\log x'} < \frac{F(x)}{\log x},$$

и замѣчая, что

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta(m) - \vartheta(m-1)}{\log m} F(m) = \frac{\vartheta(t)}{\log(t+1)} F(t+1) - \frac{\vartheta(n-1)}{\log n} F(n) +$$
$$+ \sum_{m=n}^{m=t} \left(\frac{F(m)}{\log m} - \frac{F(m+1)}{\log(m+1)} \right) \vartheta(m),$$

гдѣ t произвольное цѣлое число большее n, имѣемъ

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta(m) - \vartheta(m-1)}{\log m} F(m) < \frac{\vartheta_1(t)}{\log(t+1)} F(t+1) - \frac{\vartheta_{11}(n-1)}{\log n} F(n) +$$
$$+ \sum_{m=n}^{m=t} \left(\frac{F(m)}{\log m} - \frac{F(m+1)}{\log(m+1)} \right) \vartheta_1(m)$$

и

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta(m) - \vartheta(m-1)}{\log m} F(m) > \frac{\vartheta_{11}(t)}{\log(t+1)} F(t+1) - \frac{\vartheta_1(n-1)}{\log n} F(n) +$$
$$+ \sum_{m=n}^{m=t} \left(\frac{F(m)}{\log m} - \frac{F(m+1)}{\log(m+1)} \right) \vartheta_{11}(m)$$

или

$$(14) \quad \sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta(m) - \vartheta(m-1)}{\log m} F(m) < -\frac{\vartheta_{11}(n-1)}{\log n} F(n) + \frac{\vartheta_1(n-1)}{\log n} F(n) +$$
$$+ \sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta_1(m) - \vartheta_1(m-1)}{\log m} F(m)$$

и

$$(15)\quad \sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta(m)-\vartheta(m-1)}{\log m} F(m) > -\frac{\vartheta_1(n-1)}{\log n} F(n) + \frac{\vartheta_{11}(n-1)}{\log n} F(n) + $$
$$+ \sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta_{11}(m)-\vartheta_{11}(m-1)}{\log m} F(m).$$

Но

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta_1(m)-\vartheta_1(m-1)}{\log m} F(m) =$$

$$\sum_{m=n}^{m=t} \left(\frac{6}{5}A - \frac{12}{5}A\,(m^{\frac{1}{2}} - (m-1)^{\frac{1}{2}}) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 m - \log^2(m-1)) - \frac{15}{4}(\log m - \log(m-1))\right)\frac{F(m)}{\log m}$$

и такъ какъ

$$\lim_{m=\infty}[m^{\frac{1}{2}} - (m-1)^{\frac{1}{2}}] = 0, \quad \lim_{m=\infty}[\log^2 m - \log^2(m-1)] = 0, \quad \lim_{m=\infty}[\log m - \log(m-1)] = 0$$

то, слѣдовательно, если рядъ

$$\sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{F(m)}{\log m}$$

сходящійся, при возрастаніи t до ∞ сумма

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta_1(m)-\vartheta_1(m-1)}{\log m} F(m)$$

будетъ стремиться къ конечному предѣлу, а, слѣдовательно, на основаніи неравенства (14) и положительное число

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta(m)-\vartheta(m-1)}{\log m} F(m)$$

будетъ также при безпредѣльномъ возрастаніи t стремиться къ конечному предѣлу и значитъ рядъ

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \ldots\ldots$$

будетъ сходящійся. Далѣе,

$$\sum_{m=n}^{m=t} \frac{\vartheta_{11}(m)-\vartheta_{11}(m-1)}{\log m} F(m) =$$

$$\sum_{m=n}^{m=t} \left(A - \frac{12}{5}A\,(m^{\frac{1}{2}} - (m-1)^{\frac{1}{2}}) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 m - \log^2(m-1)) - \frac{15}{4}(\log m - \log(m-1))\right)\frac{F(m)}{\log m}$$

и, слѣдовательно, если рядъ

$$\sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{F(m)}{\log m}$$

расходящійся, то будетъ расходящимся и рядъ

$$\sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{\vartheta_{11}(m) - \vartheta_{11}(m-1)}{\log m} F(m),$$

а значитъ (неравенство (15)) и рядъ

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \ldots\ldots$$

будетъ также расходящійся. Теорема доказана. Вопросъ о сходимости ряда

$$F(2) + F(3) + F(5) + \ldots\ldots,$$

зависящаго исключительно отъ простыхъ чиселъ она сводитъ на вопросъ о сходимости ряда

$$\sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{F(m)}{\log m},$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ цѣлыя числа. Послѣдній же вопросъ во многихъ случаяхъ можетъ быть рѣшенъ при помощи извѣстныхъ признаковъ. Какъ примѣръ, разсмотримъ слѣдующій рядъ:

$$\frac{1}{2(\log 2)^\rho} + \frac{1}{3(\log 3)^\rho} + \frac{1}{5(\log 5)^\rho} + \frac{1}{7(\log 7)^\rho} + \ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ $\rho > 0$. Замѣчая, что рядъ

$$\frac{1}{2(\log 2)^{1+\rho}} + \frac{1}{3(\log 3)^{1+\rho}} + \frac{1}{4(\log 4)^{1+\rho}} + \ldots\ldots$$

сходящійся, мы заключаемъ, что и рядъ

$$\frac{1}{2(\log 2)^\rho} + \frac{1}{3(\log 3)^\rho} + \frac{1}{5(\log 5)^\rho} + \frac{1}{7(\log 7)^\rho} + \ldots\ldots$$

будетъ также сходящійся. Точно также нашли бы, что, если $k > 0$, но < 1, то рядъ ($\rho > 0$)

$$\frac{1}{2^k(\log 2)^\rho} + \frac{1}{3^k(\log 3)^\rho} + \frac{1}{5^k(\log 5)^\rho} + \frac{1}{7^k(\log 7)^\rho}$$

[бу]детъ расходящійся.

§ 13. Исходя изъ той же формулы (2) Чебышева, данной въ главѣ I, § 1, мы можемъ получить двѣ формулы, которыя дадутъ намъ возможность вывести неравенства для суммъ логариѳмовъ простыхъ чиселъ, заключающихся въ линейныхъ формахъ

$$4m+1, \quad 4m+3, \quad 6m+1, \quad 6m+5$$

и не превосходящихъ даннаго предѣла, при чемъ разсужденія будутъ аналогичны съ вышеприведенными разсужденіями Чебышева. Пусть a обозначаетъ произвольное число большее 1, а $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — функціи опредѣляющіяся для всѣхъ положительныхъ значеній слѣдующимъ образомъ: если

$$0 < z < 5,$$

то

$$\alpha(z) = 0;$$

если же $z \geqq 5$, то $\alpha(z)$ есть сумма логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, заключающихся въ формѣ

$$4m+1$$

и не превосходящихъ z. Если

$$0 < z < 3,$$

то

$$\beta(z) = 0;$$

если же $z \geqq 3$, то $\beta(z)$ есть сумма логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, заключающихся въ формѣ

$$4m+3$$

и не превосходящихъ z. Кромѣ того условимся выраженія вида

$$\alpha\left(\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{и} \quad \beta\left(\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

обозначать проще такъ

$$\alpha\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \beta\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда положивъ

$$\vartheta(z) - \log 2 = \vartheta'(z),$$

$$\psi_1(z) = \vartheta'(z) + \vartheta'(z^{\frac{1}{2}}) + \vartheta'(z^{\frac{1}{3}}) + \vartheta'(z^{\frac{1}{4}}) + \ldots.$$

$$\psi_2(z)=\psi_1(z^{\frac{1}{2}})+\alpha(z)+\alpha(z^{\frac{1}{3}})+\alpha(z^{\frac{1}{5}})+\alpha(z^{\frac{1}{7}})+\alpha(z^{\frac{1}{9}})+\ldots.$$

$$\psi_3(z)=\beta(z)+\beta(z^{\frac{1}{3}})+\beta(z^{\frac{1}{5}})+\beta(z^{\frac{1}{7}})+\beta(z^{\frac{1}{9}})+\ldots.$$

будемъ имѣть:

$$(16)\left\{\begin{array}{l}-\log 3+\log 5-\log 7+\log 9\ldots\pm\log a'=\\ \left(\psi_2(a)-\psi_2\left(\frac{a}{3}\right)+\psi_2\left(\frac{a}{5}\right)-\psi_2\left(\frac{a}{7}\right)+\ldots\right)-\left(\psi_3(a)-\psi_3\left(\frac{a}{3}\right)+\psi_3\left(\frac{a}{5}\right)\ldots\ldots\right),\end{array}\right.$$

гдѣ a' нечетное число, удовлетворяющее условіямъ

$$a'\leqq Ea\leqq a'+1$$

и знаменателями дробей $\frac{a}{k}$ въ выраженіяхъ

$$\psi_2\left(\frac{a}{k}\right),\quad \psi_3\left(\frac{a}{k}\right)$$

служатъ исключительно нечетныя числа. Для доказательства справедливости формулы (16) обращаемся къ формулѣ (2) § 1, глава I и опредѣляемъ функцію $f(x)$ для всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ значеній x слѣдующимъ образомъ: при всѣхъ значеніяхъ x большихъ a

$$f(x)=0;$$

при всѣхъ нечетныхъ значеніяхъ $x\leqq a$

$$f(x)=\left(\frac{-1}{x}\right),$$

гдѣ $\left(\frac{-1}{x}\right)$ символъ Лежандра-Якоби и при всѣхъ четныхъ значеніяхъ $x\leqq a$

$$f(x)=0.$$

Тогда $F(p)$ $(p>2)$ опредѣлится слѣдующимъ равенствомъ:

$$F(p)=\sum_1^{E\frac{a}{p}}\left(\frac{-1}{np}\right)+\sum_1^{E\frac{a}{p^2}}\left(\frac{-1}{np^2}\right)+\ldots+\sum_1^{E\frac{a}{p^\lambda}}\left(\frac{-1}{np^\lambda}\right),$$

гдѣ суммированія по n въ указанныхъ предѣлахъ распространены исключительно на всѣ нечетныя числа и число λ удовлетворяетъ условіямъ:

$$p^\lambda\leqq a<p^{\lambda+1}.$$

Слѣдовательно формула (2) § 1 принимаетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$(17)\quad \begin{cases} -\log 3+\log 5-\log 7+\log 9-\ldots\pm\log a'= \\ \sum\limits_{3}^{Ea}\left(\sum\limits_{1}^{E\frac{a}{p}}\left(\frac{-1}{np}\right)+\sum\limits_{1}^{E\frac{a}{p^2}}\left(\frac{-1}{np^2}\right)+\ldots+\sum\limits_{1}^{E\frac{a}{p^\lambda}}\left(\frac{-1}{np^\lambda}\right)\right)\log p. \end{cases}$$

Не трудно видѣть, что если p обозначаетъ простое число формы

$$4m+1,$$

то въ сумму

$$\alpha(a)-\alpha\left(\frac{a}{3}\right)+\alpha\left(\frac{a}{5}\right)-\alpha\left(\frac{a}{7}\right)+\ldots.$$

$\log p$ входитъ съ коэффиціентомъ

$$\sum_{1}^{E\frac{a}{p}}\left(\frac{-1}{np}\right)$$

(суммированія по n въ указанныхъ предѣлахъ распространяются исключительно на нечетныя числа); въ сумму

$$\alpha\left(a^{\frac{1}{2}}\right)-\alpha\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\alpha\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\alpha\left(\frac{a}{7}\right)^{\frac{1}{2}}+\ldots.$$

— съ коэффиціентомъ равнымъ

$$\sum_{1}^{E\frac{a}{p^2}}\left(\frac{-1}{np^2}\right)$$

и вообще въ сумму

$$\alpha\left(a^{\frac{1}{k}}\right)-\alpha\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{k}}+\alpha\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{k}}-\ldots..$$

— съ коэффиціентомъ равнымъ

$$\sum_{1}^{E\frac{a}{p^k}}\left(\frac{-1}{np^k}\right)$$

Если же p обозначаетъ простое число формы

$$4m+3,$$

то въ сумму

$$\beta(a)-\beta\left(\frac{a}{3}\right)+\beta\left(\frac{a}{5}\right)-\beta\left(\frac{a}{7}\right)+\ldots.$$

$\log p$ входитъ съ коэффиціентомъ равнымъ

$$-\sum_{1}^{E\frac{a}{p}}\left(\frac{-1}{np}\right),$$

— въ сумму

$$\beta\left(a^{\frac{1}{2}}\right)-\beta\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\beta\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\ldots..$$

съ коэффиціентомъ равнымъ

$$\sum_{1}^{E\frac{a}{p^2}}\left(\frac{-1}{np^2}\right)$$

и вообще въ сумму

$$\beta\left(a^{\frac{1}{k}}\right)-\beta\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{k}}+\beta\ \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{k}}-\ldots..$$

съ коэффиціентомъ равнымъ

$$(-1)^k\sum_{1}^{E\frac{a}{p^k}}\left(\frac{-1}{np^k}\right).$$

Принимая во вниманіе равенство

$$\vartheta'\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}=\alpha\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}+\beta\left(\frac{z}{m}\right)^{\frac{1}{n}}$$

и значенія функцій $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ и $\psi_3(z)$, а также полученные сейчасъ результаты; мы изъ формулы (17) и получаемъ формулу (16).

Формула эта впервые (на сколько намъ извѣстно) дана В. И. Станевичемъ въ его статьѣ «О простыхъ числахъ вида $4m+1$ и $4m-1$». (Сборникъ Инст. Инжен. Пут. Сообщ. за 1899 г.).

§ 14. Обозначимъ черезъ a, какъ и въ предыдущемъ §, произвольное число большее 1, а черезъ $\alpha'(z)$ и $\beta'(z)$ функціи, опредѣляющіяся для всѣхъ положительныхъ значеній z слѣдующимъ образомъ: для всѣхъ значеніяхъ z меньшихъ 7

$$\alpha'(z)=0,$$

а для всѣхъ значеній $z \geqq 7$ $\alpha'(z)$ есть сумма логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, заключающихся въ формѣ

$$6m+1$$

и не превышающихъ z; для всѣхъ значеній $z < 5$

$$\beta'(z) = 0,$$

а для всѣхъ значеній $z \geqq 5$ $\beta'(z)$ есть сумма логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, заключающихся въ формѣ

$$6m+5$$

и непревышающихъ z. Тогда, положивъ

$$\vartheta''(z) = \vartheta(z) - \log 2 - \log 3$$

$$\varphi_1(z) = \vartheta''(z) + \vartheta''(z^{\frac{1}{2}}) + \vartheta''(z^{\frac{1}{3}}) + \ldots\ldots$$

$$\varphi_2(z) = \varphi_1(z^{\frac{1}{2}}) + \alpha'(z) + \alpha'(z^{\frac{1}{3}}) + \alpha'(z^{\frac{1}{5}}) + \ldots\ldots$$

$$\varphi_3(z) = \beta'(z) + \beta'(z^{\frac{1}{3}}) + \beta'(z^{\frac{1}{5}}) + \beta'(z^{\frac{1}{7}}) + \beta'(z^{\frac{1}{9}}) + \ldots\ldots$$

будемъ имѣть:

$$(18)\quad \sum_{5}^{Ka}\left(\frac{-3}{n}\right)\log n = \left[\varphi_2(a) - \varphi_2\left(\frac{a}{5}\right) + \varphi_3\left(\frac{a}{7}\right) - \ldots\right] - \left[\varphi_3(a) - \varphi_3\left(\frac{a}{5}\right) + \varphi_3\left(\frac{a}{7}\right) - \ldots\right]$$

— суммированіе по n въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ нечетныя числа, не дѣлящіяся на 3 и знаменателями дробей $\frac{a}{k}$ въ выраженіяхъ $\varphi_2\left(\frac{a}{k}\right)$ и $\varphi_3\left(\frac{a}{k}\right)$ служатъ исключительно нечетныя числа, также не дѣлящіяся на 3.

Чтобы получить формулу (18) мы должны функцію $f(x)$ въ формулѣ (2), § 1 опредѣлить для всѣхъ цѣлыхъ значеній x слѣдующимъ образомъ: при всѣхъ значеніяхъ x большихъ a, а также и при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ меньшихъ a, но не взаимно простыхъ съ 6

$$f(x) = 0;$$

при всѣхъ же цѣлыхъ значеніяхъ x, меньшихъ a и взаимно простыхъ съ 6

$$f(x) = \left(\frac{-3}{x}\right),$$

гдѣ $\left(\frac{-3}{x}\right)$ — символъ Лежандра-Якоби.

При такомъ опредѣленіи функціи $f(x)$, найдемъ, что функція $F(p)$ $(p > 3)$ опредѣлится слѣдующимъ равенствомъ:

$$F(p) = \sum_{1}^{E\frac{a}{p}} \left(\frac{-3}{np}\right) + \sum_{1}^{E\frac{a}{p^2}} \left(\frac{-3}{np^2}\right) + \ldots + \sum_{1}^{E\frac{a}{p^\lambda}} \left(\frac{-3}{np^\lambda}\right),$$

гдѣ суммированія по n въ указанныхъ предѣлахъ распространены на всѣ нечетныя числа, не дѣлящіяся на 3 и

$$p^\lambda \leqq a < p^{\lambda+1}.$$

Формула (2) § 1 принимаетъ въ данномъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$\sum_{1}^{Ea} \left(\frac{-3}{n}\right) \log n = \sum \left(\sum_{1}^{E\frac{a}{p}} \left(\frac{-3}{np}\right) + \sum_{1}^{E\frac{a}{p^2}} \left(\frac{-3}{np^2}\right) + \ldots + \sum_{1}^{E\frac{a}{p^\lambda}} \left(\frac{-3}{np^\lambda}\right) \right) \log p.$$

Дальнѣйшія разсужденія аналогичны съ тѣми разсужденіями, которыя нами были приведены при выводѣ формулы (16) въ предыдущемъ §.

§ 15. Формула (16) § 13, какъ показалъ В. И. Станевичъ въ своей статьѣ, о которой мы выше упоминали, даетъ возможность получить два неравенства для суммъ логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ не превышающихъ заданнаго предѣла и имѣющихъ форму

$$4m + 1$$

и два неравенства для суммъ логариѳмовъ всѣхъ простыхъ чиселъ формы

$$4m + 3$$

и также не превышающихъ даннаго предѣла.

Мы же, пользуясь формулой (18) предыдущаго §, покажемъ рѣшенія подобныхъ вопросовъ относительно простыхъ чиселъ формъ

$$6m + 1 \quad \text{и} \quad 6m + 5.$$

Замѣчая, что

$$-\log a < \sum_{5}^{Ea} \left(\frac{-3}{n}\right) \log n < \log a$$

и

$$\varphi_2(z) \geqq \varphi_2\left(\frac{z}{5}\right) \geqq \varphi_2\left(\frac{z}{7}\right) \geqq \ldots\ldots$$

$$\varphi_3(z) \geqq \varphi_3\left(\frac{z}{5}\right) \geqq \varphi_3\left(\frac{z}{7}\right) \geqq \ldots\ldots,$$

имѣемъ на основаніи формулы (18) § 14 слѣдующія два неравенства:

(19) $$\varphi_2(z) - \varphi_2\left(\frac{z}{5}\right) - \varphi_3(z) < \log a$$

(20) $$\varphi_2(z) - \varphi_3(z) + \varphi_3\left(\frac{z}{5}\right) > -\log a.$$

Изъ опредѣленія функцій $\varphi_2(z)$ и $\varphi_3(z)$ слѣдуетъ, что

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) + \varphi_3(a).$$

Функція же $\varphi_1(a)$ легко выражается черезъ функцію $\psi(a)$ Чебышева.

А именно для полученія функціи $\varphi_1(a)$ изъ функціи $\psi(a)$, опредѣляющейся уравненіемъ

$$\psi(a) = \vartheta(a) + \vartheta(a^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(a^{\frac{1}{3}}) + \ldots,$$

надо изъ послѣдней исключить log 2 и log 3. Такъ какъ log 2, какъ легко убѣдиться, входитъ въ функцію $\psi(a)$ съ коэффиціентомъ

$$E\frac{\log a}{\log 2}$$

и log 3 — съ коэффиціентомъ

$$E\frac{\log a}{\log 3},$$

то, слѣдовательно,

$$\varphi_2(a) + \varphi_3(a) = \varphi_1(a) = \psi(a) - \left[E\frac{\log a}{\log 2}\right]\log 2 - \left[E\frac{\log a}{\log 3}\right]\log 3.$$

Принимая во вниманіе послѣднее равенство и неравенство (7) § 9, (9) § 10, находимъ:

$$\varphi_2(a) + \varphi_3(a) > Aa - \frac{5}{2}\log a - 1 - \frac{\log a}{\log 2}\log 2 - \frac{\log a}{\log 3}\log 3$$

$$\varphi_2(a) + \varphi_3(a) < \frac{6}{5}Aa + \frac{5}{4\log 6}\log^2 a + \frac{5}{4}\log a + 1 - \left(\frac{\log a}{\log 2} - 1\right)\log 2 - \left(\frac{\log a}{\log 3} - 1\right)\log 3$$

или, что тоже,

(21) $$\varphi_2(a) + \varphi_3(a) > Aa - \frac{9}{2}\log a - 1$$

$$\varphi_2(a) + \varphi_3(a) < \frac{6}{5}Aa + \frac{5}{4\log 6}\log^2 a - \frac{3}{4}\log a + 1 + \log 2 + \log 3.$$

Послѣднее неравенство мы, очевидно, можемъ замѣнить слѣдующимъ:

(22) $$\varphi_2(a) + \varphi_3(a) < \frac{6}{5}Aa + \frac{5}{4\log 6}\log^2 a - \frac{3}{4}\log a + 4.$$

Изъ неравенствъ (19) и (22) имѣемъ:

$$(23)\qquad \varphi_2(a)-\frac{1}{2}\varphi_2(a)<\frac{3}{5}Aa+\frac{5}{8\log 6}\log^2 a+\frac{1}{8}\log a+2;$$

изъ неравенствъ (20) и (22)

$$(24)\qquad \varphi_3(a)-\frac{1}{2}\varphi_3(a)<\frac{3}{5}Aa+\frac{5}{8\log 6}\log^2 a+\frac{1}{8}\log a+2;$$

изъ неравенствъ (20) и (21)

$$(25)\qquad \varphi_2(a)>\frac{Aa}{2}-\frac{11}{4}\log a-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{a}{5}\right)$$

и наконецъ, изъ неравенствъ (19) и (21)

$$(26)\qquad \varphi_3(a)>\frac{Aa}{2}-\frac{11}{4}\log a-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varphi_2\left(\frac{a}{5}\right).$$

Подберемъ теперь въ функціи

$$F(z)=Bz+B_1\log^2 z+B_2\log z+B_3$$

коэффиціенты B, B_1, B_2 и B_3 такъ, чтобы слѣдующее равенство было тождествомъ

$$F(z)-\frac{1}{2}F\left(\frac{z}{5}\right)=\frac{3}{5}Az+\frac{5}{8\log 6}\log^2 z+\frac{1}{8}\log z+2.$$

Найдемъ

$$B=\frac{2}{8}A,\quad B_1=\frac{5}{4\log 6},\quad B_2=\frac{1}{4}-\frac{5\log 5}{2\log 6},$$

$$B_3=4-\frac{\log 5}{4}+\frac{15(\log 5)^2}{4\log 6}.$$

При такомъ выборѣ функціи $F(z)$ мы будемъ имѣть на основаніи неравенствъ (23) и (24):

$$\varphi_2(a)-\frac{1}{2}\varphi_2\left(\frac{a}{5}\right)<F(a)-\frac{1}{2}F\left(\frac{a}{5}\right)$$

$$\varphi_3(a)-\frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{a}{5}\right)<F(a)-\frac{1}{2}F\left(\frac{a}{5}\right)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi_2(a)-F(a)<\frac{1}{2}\left[\varphi_2\left(\frac{a}{5}\right)-F\left(\frac{a}{5}\right)\right.$$

$$\varphi_2\left(\frac{a}{5}\right)-F\left(\frac{a}{5}\right)<\frac{1}{2}\left[\varphi_2\left(\frac{a}{5^2}\right)-F\left(\frac{a}{5^2}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_2\left(\frac{a}{5^{k-1}}\right)-F\left(\frac{a}{5^{k-1}}\right)<\frac{1}{2}\left[\varphi_2\left(\frac{a}{5^k}\right)-F\left(\frac{a}{5^k}\right)\right]$$

и значитъ

$$\varphi_2(a) - F(a) < \frac{1}{2^k}\left[\varphi_2\left(\frac{a}{5^k}\right) - F\left(\frac{a}{5^k}\right)\right]$$

Подобное же неравенство имѣемъ и для функціи $\varphi_3(a)$:

$$\varphi_3(a) - F(a) < \frac{1}{2^k}\left[\varphi_3\left(\frac{a}{5^k}\right) - F\left(\frac{a}{5^k}\right)\right].$$

Если предположимъ, что цѣлое и положительное число k выбрано подъ условіемъ

$$1 \leqq \frac{a}{5^k} < 5,$$

то

$$\varphi_2\left(\frac{a}{5^k}\right) = 0, \quad \varphi_3\left(\frac{a}{5^k}\right) = 0,$$

и слѣдовательно

$$\varphi_2(a) - F(a) < -\frac{1}{2^k}F\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

$$\varphi_3(a) - F(a) < -\frac{1}{2^k}F\left(\frac{a}{2^k}\right);$$

а такъ какъ функція

$$F(z) = \frac{2}{3}Az + \frac{5}{4\log 6}\log^2 z + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\log 5}{2\log 6}\right)\log z + 4 - \frac{\log 5}{4} + \frac{15(\log 5)^2}{4\log 6}$$

при всѣхъ значеніяхъ z

$$1 \leqq z < 5$$

болѣе числа

$$\frac{2}{3}A + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\log 5}{2\log 6}\right)3 + 4 - \frac{\log 5}{4} + \frac{15(\log 5)^2}{4\log 6} > 0,$$

то, слѣдовательно,

$$\varphi_2(a) < F(a)$$

$$\varphi_3(a) < F(a)$$

или, подставляя вмѣсто функціи $F(a)$ ея значеніе,

$$\varphi_2(a) < \frac{2}{3}Aa + \frac{5}{4\log 6}\log^2 a + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\log 5}{2\log 6}\right)\log a + 4 - \frac{\log 5}{4} + \frac{15(\log 5)^2}{4\log 6}$$

$$\varphi_3(a) < \frac{2}{3}Aa + \frac{5}{4\log 6}\log^2 a + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\log 5}{2\log 6}\right)\log a + 4 - \frac{\log 5}{4} + \frac{15(\log 5)^2}{4\log 6},$$

а потому и подавно

$$(27) \qquad \varphi_2(a) < \frac{2}{3}Aa + \frac{5}{4\log 6}\log^2 a + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\log 5}{2\log 6}\right)\log a + 10$$

(28) $$\varphi_3(a) < \frac{2}{3} Aa + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2} \frac{\log 5}{\log 6}\right) \log a + 10.$$

Замѣняя въ правыхъ частяхъ неравенствъ (25) и (26) $\varphi_3\left(\frac{a}{5}\right)$ и $\varphi_2\left(\frac{a}{5}\right)$ соотвѣтственно большими значеніями, даваемыми неравенствами (27) и (28), найдемъ, что

$$\varphi_2(a) > \frac{13}{80} Aa - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 a - \left(\frac{23}{8} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a - \frac{43}{8} - \frac{15 (\log 5)^2}{8 \log 6} + \frac{\log 5}{8}$$

$$\varphi_3(a) > \frac{13}{80} Aa - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 a - \left(\frac{23}{8} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a - \frac{43}{8} - \frac{15 (\log 5)^2}{8 \log 6} + \frac{\log 5}{8},$$

а потому и подавно

(29) $$\varphi_2(a) > \frac{13}{80} Aa - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 a - \left(\frac{23}{8} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a - 9$$

(30) $$\varphi_3(a) > \frac{13}{80} Aa - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 a - \left(\frac{23}{8} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a - 9.$$

Полученныя нами неравенства (27), (28), (29) и (30) и даютъ намъ возможность установить неравенства для функцій $\alpha'(a)$ и $\beta'(a)$. Изъ равенства

$$\varphi_2(a) = \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) + \alpha'(a) + \alpha'(a^{\frac{1}{3}}) + \alpha'(a^{\frac{1}{5}}) + \ldots,$$

опредѣляющаго функцію $\varphi_2(a)$, имѣемъ:

(31) $$\alpha'(a) < \varphi_2(a) - \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}).$$

Замѣчая же, что

$$\varphi_2(a) \leqq \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) + \alpha'(a) + \vartheta''(a^{\frac{1}{3}}) + \vartheta''(a^{\frac{1}{5}}) + \ldots..$$

или, что то же,

$$\varphi_2(a) \leqq \alpha'(a) + \varphi_1(a) - \vartheta''(a),$$

имѣемъ:

(31¹) $$\alpha'(a) \geqq \varphi_2(a) - (\varphi_1(a) - \vartheta''(a)).$$

Но

$$\varphi_1(a) - 2\,\varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) = \vartheta''(a_1) - \vartheta''(a^{\frac{1}{2}}) + \vartheta''(a^{\frac{1}{3}}) - \vartheta''(a^{\frac{1}{4}}) + \ldots\ldots,$$

слѣдовательно,

$$\varphi_1(a) - 2\,\varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) \leqq \vartheta''(a)$$

и значитъ

$$\varphi_1(a) - \vartheta''(a) \leqq 2\ \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}),$$

а потому, на основаніи неравенства (31[1])

(32) $$\alpha'(a) \geqq \varphi_2(a) - 2\ \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}).$$

Далѣе, такъ какъ

$$\varphi_3(a) = \beta'(a) + \beta'(a^{\frac{1}{3}}) + \beta'(a^{\frac{1}{5}}) + \beta'(a^{\frac{1}{7}}) + \beta'(a^{\frac{1}{9}}) + \ldots\ldots,$$

то

(33) $$\beta'(a) \leqq \varphi_3(a).$$

Замѣчая же, что

$$\beta'(a^{\frac{1}{5}}) + \beta'(a^{\frac{1}{7}}) + \beta'(a^{\frac{1}{9}}) + \ldots \leqq \vartheta''(a^{\frac{1}{4}}) + \vartheta''(a^{\frac{1}{6}}) + \ldots.$$

или, что тоже

$$\beta'(a^{\frac{1}{5}}) + \beta'(a^{\frac{1}{7}}) + \beta'(a^{\frac{1}{9}}) + \ldots\ldots \leqq \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) - \vartheta''(a^{\frac{1}{2}}),$$

находимъ второе неравенство для функціи $\beta'(a)$:

$$\beta'(a) \geqq \varphi_3(a) - \beta'(a^{\frac{1}{3}}) - (\varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) - \vartheta''(a^{\frac{1}{2}}));$$

но по вышедоказанному

$$\varphi_1(a) - \vartheta''(a) \leqq 2\ \varphi_1(a^{\frac{1}{2}}),$$

а потому

$$\varphi_1(a^{\frac{1}{2}}) - \vartheta''(a^{\frac{1}{2}}) \leqq 2\ \varphi_1(a^{\frac{1}{4}})$$

и, слѣдовательно,

$$\beta'(a) \geqq \varphi_3(a) - \beta'(a^{\frac{1}{3}}) - 2\ \varphi_1(a^{\frac{1}{4}}),$$

а значитъ и подавно

(34) $$\beta'(a) \geqq \varphi_3(a) - 3\ \varphi_1(a^{\frac{1}{3}}).$$

Принимая во вниманіе равенство

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) + \varphi_3(a)$$

и неравенства (21), (22), (27), (28), (29), (30), (31), (32), (33) и (34) мы легко найдемъ, что

$$(35)\quad \alpha'(a) < \frac{2}{3} Aa - Aa^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{\log 5}{\log 6}\right) \log a + 11$$

$$(36)\quad \alpha'(a) > \frac{13}{30} Aa - \frac{12}{5} Aa^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a - \left(\frac{17}{8} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a - 17$$

$$(37)\quad \beta'(a) < \frac{2}{3} Aa + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a + \left(\frac{1}{4} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a + 10$$

$$(38)\quad \beta'(a) > \frac{13}{30} Aa - \frac{18}{5} Aa^{\frac{1}{3}} - \frac{25}{24 \log 6} \log^2 a - \left(\frac{17}{8} - \frac{5 \log 5}{2 \log 6}\right) \log a - 21$$

Для функцій, обозначенныхъ нами въ § 13 черезъ $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ В. И. Станевичъ получилъ слѣдующія неравенства

$$(39)\quad \alpha(x) < \frac{18}{25} Aa - Aa^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a + \frac{\log 192}{2 \log 6} \log a + 5$$

$$(40)\quad \alpha(x) > \frac{19}{50} Aa - \frac{12}{5} Aa^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a - \frac{5 \log 96}{8 \log 6} \log a + 7$$

$$(41)\quad \beta(x) < \frac{18}{25} Aa + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 a - \frac{5 \log \frac{3}{2}}{4 \log 6} \log a + 4$$

$$(42)\quad \beta(x) > \frac{19}{50} Aa - \frac{18}{5} Aa^{\frac{1}{3}} - \frac{25}{24 \log 6} \log^2 a - \frac{5 \log 96}{8 \log 6} \log a - 9.$$

Ходъ разсужденій для полученія этихъ неравенствъ тотъ же самый, что и въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ.

§ 16. Изъ неравенства (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41) и (42) предыдущаго § можно получить слѣдствія, аналогичныя тѣмъ, которыя были получены Чебышевымъ изъ его неравенствъ и которыя нами выше были приведены. Пусть l и L обозначаютъ два положительныхъ числа и $L > l$. Пусть далѣе число простыхъ чиселъ формы

$$6m + 1$$

большихъ l, но не превышающихъ L будетъ m. Тогда, обозначая правую часть неравенства (35) черезъ $\vartheta_3(a)$, а правую часть неравенства (36) черезъ $\vartheta_4(a)$, найдемъ, что

$$m \log l < \vartheta_3(L) - \vartheta_4(l)$$

$$m \log L > \vartheta_4(L) - \vartheta_3(l)$$

и, слѣдовательно,

$$m < \frac{\vartheta_3(L) - \vartheta_4(l)}{\log l} \quad \text{и} \quad m > \frac{\vartheta_4(L) - \vartheta_3(l)}{\log L}.$$

Подставляя въ послѣднее неравенство вмѣсто $\vartheta_3(l)$ и $\vartheta_4(L)$ ихъ значенія, находимъ:

$$m > \frac{\left(\frac{13}{30}L - \frac{2}{3}l\right)A - \left(\frac{12}{5}L^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right)A - \frac{5}{4\log 6}\left(\log^2 L + \log^2 l\right) - \left[\left(\frac{17}{8} - \frac{5}{2}\frac{\log 5}{\log 6}\right)\text{Log}\, L + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{\log 5}{\log 6}\right)\log l\right] - 28}{\log L}.$$

Такъ какъ число k, опредѣляемое равенствомъ

$$k = \frac{\left(\frac{13}{30}L - \frac{2}{3}l\right)A - \frac{12}{5}AL^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2\log 6}\log^2 L - 5\left(1 - \frac{\log 5}{\log 6}\right)\log L - 28}{\log L}$$

очевидно, менѣе m, то положивъ

$$l = \frac{13}{20}L - \frac{18}{5}L^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{4A\log 6}\log^2 L - \frac{15}{2A}\left(1 + \frac{k}{5} - \frac{\log 5}{\log 6}\right)\log L - \frac{28}{A}$$

мы можемъ утверждать, что въ рядѣ

$$El + 1, \quad El + 2, \; \ldots \; EL$$

находится болѣе, чѣмъ k простыхъ чиселъ формы

$$6m + 1.$$

Тѣ же два неравенства (35) и (36) даютъ возможность доказать и слѣдующую теорему: если x обозначаетъ положительное число и если $F(x)$ при всѣхъ значеніяхъ x, превосходящихъ опредѣленный предѣлъ, остается числомъ положительнымъ, то сходимость ряда

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \ldots$$

есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобы рядъ

$$\sum F(p),$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ простыя числа формы

$$6m + 1,$$

былъ также сходящимся. Доказывается эта теорема совершенно такъ же, какъ и вышедоказанная теорема Чебышева — все различіе будетъ со-

стоять въ томъ, что вмѣсто функцій $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$ и $\vartheta_{11}(x)$ надо будетъ взять соотвѣтственно функціи $\vartheta''(x)$, $\vartheta_3(x)$ и $\vartheta_4(x)$. Подобные же результаты могутъ быть получены и для простыхъ чиселъ формъ

$$6m+5,\quad 4m+1 \quad \text{и} \quad 4m+3.$$

§ 17. Въ заключеніе настоящей главы разсмотримъ слѣдующія два выраженія

$$\sum_2^a \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad \prod_2^a \frac{1}{1-\frac{1}{p}},$$

гдѣ суммированіе и произведеніе распространены на всѣ простыя числа, не превышающія даннаго положительнаго числа a. Приближеннымъ вычисленіемъ обоихъ этихъ выраженій занимались Лежандръ и Чебышевъ и оба пришли къ слѣдующимъ двумъ равенствамъ:

$$\sum_2^a \frac{1}{p} = \log\log a + P \tag{43}$$

$$\prod_2^a \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = P' \log a, \tag{44}$$

гдѣ P и P' при безпредѣльномъ возрастаніи a остаются числами конечными. Лежандръ исходилъ изъ предположенія, что функція $\varphi(x)$, выражающая число простыхъ чиселъ меньшихъ x, при большихъ значеніяхъ x, съ достаточною точностью опредѣляется равенствомъ

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366},$$

а Чебышевъ — изъ предположенія, что та же функція приближенно опредѣляется равенствомъ

$$\varphi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x}.$$

Основываясь на тѣхъ изысканіяхъ Чебышева, о которыхъ шла рѣчь выше въ настоящей главѣ, Мертенсъ первый показалъ, что обѣ формулы (43) и (44) могутъ быть получены независимо отъ какихъ либо предположеній о функціи $\varphi(x)$*). Къ изложенію этого изслѣдованія Мертенса (съ

*) Journal für die reine und angew. Mathem. von Crelle, t. 78.

нѣкоторыми незначительными измѣненіями) мы и перейдемъ. Пусть a обозначаетъ любое цѣлое число большее 1 и $\omega(a)$ — функцію, опредѣляющуюся слѣдующимъ равенствомъ

$$\omega(a)=\sum\left(\frac{\log p}{p}+\frac{\log p}{p^2}+\ldots+\frac{\log p}{p^\lambda}\right),$$

гдѣ суммированіе въ правой части распространено на всѣ простыя числа, не превышающія a и цѣлое число λ опредѣляется изъ условій

$$p^\lambda\leqq a<p^{\lambda+1}.$$

Докажемъ, что функція $\omega(a)$ удовлетворяетъ слѣдующимъ двумъ неравенствамъ

$$\log a-1<\omega(a)<\log a+1.$$

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\left(E\frac{a}{p}+E\frac{a}{p^2}+\ldots+E\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p<\left(\frac{a}{p}+\frac{a}{p^2}+\ldots+\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p$$

$$\left(E\frac{a}{p}+E\frac{a}{p^2}+\ldots+E\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p>\left(\frac{a}{p}+\frac{a}{p^2}+\ldots+\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p-\lambda\log p;$$

но

$$\sum\left(E\frac{a}{p}+E\frac{a}{p^2}+\ldots+E\frac{a}{p^\lambda}\right)\log p=\log 1.2\ldots a$$

$$\sum\lambda\log p=\psi(a),$$

гдѣ $\psi(a)$ обозначаетъ функцію Чебышева, опредѣляющуюся равенствомъ

$$\psi(a)=\vartheta(a)+\vartheta(a^{\frac{1}{2}})+\vartheta(a^{\frac{1}{3}})+\ldots.$$

и суммированія распространены на всѣ простыя числа, не превышающія a, слѣдовательно,

$$(\alpha)\qquad \omega(a)>\frac{\log 1.2..a}{a}$$

и

$$(\beta)\qquad \omega(a)<\frac{\log 1.2..a}{a}+\frac{\psi(a)}{a}.$$

Такъ какъ

$$\frac{\log 1.2..a}{a}>\log a-1,$$

то на основаніи неравенства (α) имѣемъ и подавно:

$$\omega(a) > \log a - 1.$$

Далѣе, принимая во вниманіе неравенства

$$\frac{\log 1.2..a}{a} < \frac{\log 2\pi}{2a} + \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\log a}{a} - 1 + \frac{1}{12a^2}$$

$$\frac{\psi(a)}{a} < \frac{6}{5}A + \frac{5}{4\log 6}\frac{\log^2 a}{a} + \frac{5}{4}\frac{\log a}{a} + \frac{1}{a}$$

на основаніи неравенства (β) находимъ:

$$\omega(a) < \log a + 1 - \left(2 - \frac{6}{5}A - \frac{\log 2\pi}{2a} - \frac{5}{4\log 6}\frac{\log^2 a}{a} - \frac{7}{4}\frac{\log a}{a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{12a^2}\right)$$

Но для всѣхъ значеній $a \geqq 10$

$$2 - \frac{6}{5}A - \frac{\log 2\pi}{2a} - \frac{5}{4\log 6}\frac{\log^2 a}{a} - \frac{7}{4}\frac{\log a}{a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{12a^2} > 0,$$

слѣдовательно, для всѣхъ значеній $a \geqq 10$, имѣемъ

$$\omega(a) < \log a + 1.$$

Для значеній же a меньшихъ 10 это неравенство провѣряется непосредственно. Какъ слѣдствіе полученныхъ нами двухъ неравенствъ для функціи $\omega(a)$ имѣемъ слѣдующее предложеніе: числовое значеніе разности

$$\log a - \sum_2^a \frac{\log p}{p}$$

менѣе 2. Дѣйствительно,

$$(\gamma) \qquad \sum_2^a \frac{\log p}{p} = \omega(a) - \sum_2^a \left(\frac{\log p}{p^2} + \frac{\log p}{p^3} + \ldots + \frac{\log p}{p^\lambda}\right);$$

но

$$\sum_2^a \left(\frac{\log p}{p^2} + \frac{\log p}{p^3} + \ldots + \frac{\log p}{p^\lambda}\right) < \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{\log 2}{2^m} + \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{\log 3}{3^m} + \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{\log 5}{5^m} + \ldots\ldots$$

или, что тоже,

$$\sum_2^a \left(\frac{\log p}{p^2} + \frac{\log p}{p^3} + \ldots + \frac{\log p}{p^\lambda}\right) < \frac{\log 2}{1.2} + \frac{\log 3}{2.3} + \frac{\log 5}{4.5} + \frac{\log 7}{6.7} + \ldots\ldots,$$

а такъ какъ

$$\frac{\log 2}{1.2}+\frac{\log 3}{2.3}+\frac{\log 5}{4.5}+\frac{\log 7}{6.7}+\ldots<\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{6}+\sum_{m=2}^{m=\infty}\frac{\log 2m}{(2m)^2}$$

и

$$\sum_{m=2}^{m=\infty}\frac{\log 2m}{(2m)^2}=\frac{1}{4}\sum_{m=2}^{m=\infty}\frac{\log 2}{m^2}+\frac{1}{4}\sum_{m=2}^{m=\infty}\frac{\log m}{m^2}<\frac{\log 2}{4}+\frac{1}{4},$$

потому что

$$\sum_{m=2}^{m=\infty}\frac{1}{m^2}<1,\quad \sum_{m=2}^{m=\infty}\frac{\log m}{m^2}<\frac{\log 2}{2^2}+\frac{\log 3}{3^2}+\int_3^\infty\frac{\log x}{x^2}\,dx<1,$$

то, слѣдовательно,

$$\frac{\log 2}{1.2}+\frac{\log 3}{2.3}+\frac{\log 5}{4.5}+\frac{\log 7}{6.7}+\ldots\ldots<\frac{3}{4}\log 2+\frac{\log 3}{6}+\frac{1}{4}<1,$$

а потому и подавно

$$\sum_2^a\left(\frac{\log p}{p^2}+\frac{\log p}{p^3}+\ldots\ldots+\frac{\log p}{p^\lambda}\right)<1.$$

Принимая во вниманіе равенство (γ) и два неравенства, полученныя выше для функціи $\omega(a)$, а также послѣднее неравенство, мы и убѣждаемся въ справедливости высказаннаго выше предложенія. Обратимся теперь къ формулѣ (7) § 5 (I глава). Изъ нея имѣемъ:

$$\sum_2^a\frac{1}{p^{1+\rho}}=-\log\rho+\log\left(1+\rho f_2(\rho)\right)-f_3(\rho)-\sum_{a+1}^\infty\frac{1}{p^{1+\rho}}.$$

Обозначая сумму

$$\sum_2^n\frac{\log p}{p}$$

черезъ $\omega_1(n)$ и замѣчая, что

$$\frac{\omega_1(n)-\omega_1(n-1)}{\log n}=0\quad\text{или}\quad\frac{1}{n},$$

смотря потому — составное или простое число n, мы можемъ сумму

$$\sum_{a+1}^\infty\frac{1}{p^{1+\rho}}$$

представить въ такомъ видѣ:

$$\sum_{a+1}^{\infty}\frac{1}{p^{1+\rho}}=-\frac{\omega_1(a)}{(a+1)^\rho\log(a+1)}+\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^\rho\log n}-\frac{1}{(n+1)^\rho\log(n+1)}\right)\omega_1(n).$$

Итакъ, имѣемъ:

$$(45)\quad \sum_{2}^{a}\frac{1}{p^{1+\rho}}=-\log\rho+\log(1+\rho f_2(\rho))-f_3(\rho)+\frac{\omega_1(a)}{(a+1)^\rho\log(a+1)}-S_a,$$

гдѣ

$$S_a=\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^\rho\log n}-\frac{1}{(n+1)^\rho\log(n+1)}\right)\omega_1(n).$$

Займемся преобразованіемъ суммы S_a. Такъ какъ

$$\omega_1(n)=\log n+\delta_n,$$

гдѣ δ_n по доказанному обозначаетъ число по абсолютному значенію меньшее 2 и

$$\frac{1}{n^\rho\log n}-\frac{1}{(n+1)^\rho\log(n+1)}=\left[\frac{1}{n^\rho}-\frac{1}{(n+1)^\rho}-\frac{\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)^\rho\log(n+1)}\right]\frac{1}{\log n}=$$

$$\left[\frac{1}{n^\rho}-\frac{1}{(n+1)^\rho}+\frac{1}{(n+1)^{\rho+1}\log(n+1)}+\frac{\lambda_n}{2n(n+1)^\rho\log(n+1)}\right]\frac{1}{\log n},$$

гдѣ λ_n обозначаетъ число большее 0, но меньшее 1, то, слѣдовательно,

$$S_a=\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n}+\frac{1}{(a+1)^\rho}-\frac{1}{(a+1)^{1+\rho}\log(a+1)}+\lambda\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{2n(n+1)^{1+\rho}\log(n+1)}+$$

$$+\sum_{a+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\rho\log n}-\frac{1}{(n+1)^\rho\log(n+1)}\right)\delta_n,$$

гдѣ $0<\lambda<1$. Далѣе имѣемъ

$$\frac{1}{n(n+1)^{1+\rho}\log(n+1)}<\frac{1}{n(n+1)\log(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\log(n+1)}<\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)},$$

а потому

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{2n(n+1)^{1+\rho}\log(n+1)}<\frac{1}{2(a+1)\log(a+1)}.$$

Абсолютное же значеніе выраженія

$$\delta_n\left(\frac{1}{n^\rho\log n}-\frac{1}{(n+1)^\rho\log(n+1)}\right)$$

менѣе

$$2\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log (n+1)}\right),$$

и значитъ абсолютное значеніе суммы

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^{\rho}\log n}-\frac{1}{(n+1)^{\rho}\log (n+1)}\right)\delta_n$$

менѣе $\frac{2}{\log (a+1)}$. Слѣдовательно,

$$S_a=\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n}+\frac{1}{(a+1)^{\rho}}-\frac{1}{(a+1)^{1+\rho}\log (a+1)}+\beta,$$

гдѣ β обозначаетъ число, абсолютное значеніе котораго менѣе

$$\frac{1}{2(a+1)\log (a+1)}+\frac{2}{\log (a+1)}.$$

Вносял найденное нами выраженіе для суммы S_a въ формулу (45), находимъ:

$$\sum_{2}^{a}\frac{1}{p^{1+\rho}}=-\log\rho+\log\left(1+\rho f_2(\rho)\right)-f_3(\rho)+\frac{\omega_1(a)}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}-\frac{1}{(a+1)^{\rho}}+$$

$$+\frac{1}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}-\beta-\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n};$$

но

$$\frac{\omega_1(a)}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}-\frac{1}{(a+1)^{\rho}}+\frac{1}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}=\frac{\log a-\log (a+1)+\delta_a}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}+$$

$$+\frac{1}{(a+1)^{\rho+1}\log (a+1)}=\frac{\delta_a}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}-\frac{\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a+1}}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)},$$

а потому абсолютное значеніе выраженія

$$\frac{\omega_1(a)}{(a+1)^{\rho}\log (a+1)}-\frac{1}{(a+1)^{\rho}}+\frac{1}{(a+1)^{1+\rho}\log (a+1)}$$

менѣе

$$\frac{2}{\log (a+1)}+\frac{1}{a^2\log (a+1)},$$

и значитъ

$$(46)\quad \sum_{2}^{a}\frac{1}{p^{1+\rho}}=-\log\rho+\log\left(1+\rho f_2(\rho)\right)-f_3(\rho)+\gamma-\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n},$$

гдѣ γ обозначаетъ число, абсолютное значеніе котораго менѣе

$$\frac{4}{\log(a+1)} + \frac{1}{a\log(a+1)}.$$

Переходимъ къ вычисленію суммы

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}\log n}$$

Такъ какъ

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} < \int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\rho}} = \frac{a^{-\rho}}{\rho}$$

и

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} > \int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\rho}} - \frac{1}{a^{1+\rho}} = \frac{a^{-\rho}}{\rho} - \frac{a^{-\rho}}{a},$$

то, предполагая число ρ меньшимъ 1, имѣемъ

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \int_\rho^1 \frac{n^{-\rho}\,d\rho}{n} < \int_\rho^1 \frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}$$

и

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \int_\rho^1 \frac{n^{-\rho}\,d\rho}{n} > \int_\rho^1 \frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho} - \frac{1}{a}\int_\rho^1 a^{-\rho}\,d\rho.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}\log n} - \sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2\log n} < \int_\rho^1 \frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}$$

и

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}\log n} - \sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2\log n} > \int_\rho^1 \frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho} + \frac{1}{a^2\log a} - \frac{1}{a^{1+\rho}\log a}.$$

Отсюда вытекаютъ слѣдующія два неравенства:

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}\log n} < \int_\rho^1 \frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho} + \sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2\log n}$$

и

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}\log n} > \int_\rho^1 \frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho} + \sum_{n=a+1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2\log n} + \frac{1}{a^2\log a} - \frac{1}{a^{1+\rho}\log a}.$$

Но

$$\int_{\rho}^{1}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}=\int_{\rho}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}-\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}=\int_{\rho\log a}^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{t}-\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}=$$

$$\int_{\rho\log a}^{\infty}\frac{dt}{e^{t}-1}-\int_{\rho\log a}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{t}-1}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt-\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}=$$

$$-\log\left(1-a^{-\rho}\right)-\int_{\rho\log a}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{t}-1}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt-\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}=$$

$$=-\log\rho-\log\log a-C-\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}+\delta,$$

гдѣ C постоянная Эйлера и δ — число, обращающееся въ 0 одновременно съ ρ. Далѣе,

$$\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho}=\frac{1}{a\log a}-\int_{1}^{\infty}\frac{a^{-\rho}\,d\rho}{\rho^{2}}<\frac{1}{a\log a}$$

и

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2}\log n}<\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{(n-1)\log(n-1)}-\frac{1}{n\log n}\right)=\frac{1}{a\log a},$$

а потому

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n}<-\log\rho-\log\log a-C+\frac{\lambda'}{a\log a}+\delta$$

и

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n}>-\log\rho-\log\log a-C+\frac{\lambda'}{a\log a}+\delta+\frac{1}{a^{2}\log a}-\frac{1}{a^{1+\rho}\log a},$$

гдѣ λ' обозначаетъ число, лежащее между -1 и $+1$. Слѣдовательно, имѣемъ:

$$\sum_{n=a+1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}\log n}=-\log\rho-\log\log a-C+\frac{\lambda''}{a\log a}+\delta,$$

гдѣ λ'' обозначаетъ число, по абсолютному значенію меньшее 2, и значитъ равенство (46) можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$(47)\qquad \sum_{2}^{a}\frac{1}{p^{1+\rho}}=\log\log a+C-f_{3}(\rho)+\beta'+\delta,$$

гдѣ β' обозначаетъ число, абсолютное значеніе котораго менѣе

$$\frac{4}{\log(a+1)}+\frac{3}{a\log a}.$$

Полагая въ обѣихъ частяхъ равенствъ (47) ρ равнымъ 0 и обозначая черезъ β'' число, абсолютное значеніе котораго менѣе

$$\frac{4}{\log(a+1)}+\frac{3}{a\log a},$$

а черезъ P слѣдующее выраженіе

$$\beta''+C-f_3(o)$$

мы и получаемъ формулу (43).

Число $f_3(o)$ опредѣляется равенствомъ

$$f_3(o)=\frac{1}{2}\sum_2^{\infty}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\sum_2^{\infty}\frac{1}{p^3}+\frac{1}{4}\sum_2^{\infty}\frac{1}{p^4}+\ldots.;$$

слѣдовательно,

$$f_2(o)<\log 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sum_3^{\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_3^{\infty}\frac{1}{p^3}+\sum_3^{\infty}\frac{1}{p^4}+\ldots\right)$$

или, что то же,

$$f_3(o)<\log 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{10.11}+\frac{1}{12.13}+\ldots\right],$$

а потому и подавно

$$f_3(o)<\log 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\log 2\right]=\frac{\log 2}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$o<f_3(o)<\frac{\log 2}{2}.$$

Разсмотримъ теперь произведеніе

$$\prod_2^a\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

Имѣемъ:

$$\log\prod_2^a\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\sum_2^a\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\sum_2^a\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\sum_2^a\frac{1}{p^3}+\ldots.;$$

и слѣдовательно,

$$\log \prod_2^a \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \log \log a + P + f_3(o) - \frac{1}{2}\sum_{a+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{3}\sum_{a+1}^{\infty}\frac{1}{p^3} \cdots\cdots$$

Но

$$\frac{1}{2}\sum_{a+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\sum_{a+1}^{\infty}\frac{1}{p^3} + \cdots < \sum_{a+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} < \frac{1}{a},$$

а потому, полагая

$$P' = P + f_3(o) - \delta',$$

гдѣ δ' обозначаетъ положительное число меньшее $\frac{1}{a}$, находимъ

$$\log \prod_2^a \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \log \log a + P'$$

и значитъ

$$\prod_2^a \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = e^{P'} \log a.$$

Такимъ образомъ нами получена и формула (44).

ГЛАВА III.

Доказательство теоремы Дирихле о простыхъ числахъ, заключающихся въ ариѳметической прогрессіи. Одно предложеніе о простыхъ дѣлителяхъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію. Теорема Чебышева о простыхъ дѣлителяхъ чиселъ формы

$$A + dx^2.$$

---

§ 18. Въ первой главѣ мы показали какъ Эйлеръ, преобразовывая нѣкоторыя безконечныя произведенія въ ряды, приходитъ къ рядамъ, зависящимъ исключительно отъ простыхъ чиселъ и устанавливая расходимость послѣднихъ рядовъ, даетъ слѣдовательно новое, существенно отличающееся отъ Эвклидовскаго, доказательство какъ безпредѣльности числа всѣхъ простыхъ чиселъ, такъ и безпредѣльности числа простыхъ чиселъ, заключающихся въ нѣкоторыхъ линейныхъ формахъ. Дальнѣйшее замѣчательное развитіе эти идеи Эйлера получаютъ въ классическомъ мемуарѣ Дирихле (Записки Берлинской Академіи Наукъ, 1837 г.), въ которомъ знаменитый авторъ, исходя изъ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ безконечныхъ произведеній и пользуясь нѣкоторыми изъ тѣхъ результатовъ, которые имъ были получены при счетѣ классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ, устанавливаетъ расходимость ряда

$$\sum \frac{1}{p},$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ простыя числа, заключающіяся въ линейной формѣ

$$ax + b$$

(a и b цѣлыя, взаимнопростыя числа) и такимъ образомъ доказываетъ слѣдующее предложеніе: если a и b цѣлыя взаимнопростыя числа, то въ ариѳметической прогрессіи

$$a, \quad a + b, \quad a + 2b, \quad a + 3b, \ldots .$$

содержится безчисленное множество простыхъ чиселъ. Изъ работъ, посвященныхъ этой же теоремѣ и появившихся послѣ Дирихле, особенно, по нашему мнѣнію, выдѣляются два мемуара Мертенса, которому удалось дополнить изслѣдованіе Дирихле и кромѣ того устранить зависимость доказательства предыдущей теоремы отъ счета классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ. Въ первомъ изъ этихъ мемуаровъ, на который мы уже ссылались въ предыдущей главѣ, онъ между прочимъ, занимается приближеннымъ вычисленіемъ для большихъ положительныхъ значеній N суммы

$$\sum_{2}^{N} \frac{1}{p},$$

гдѣ суммированіе въ указанныхъ предѣлахъ распространено исключительно только на всѣ простыя числа формы

$$ax + b$$

и приходитъ къ слѣдующему результату:

$$\sum_{2}^{N} \frac{1}{q} = \frac{\log \log N}{\varphi(a)} + R,$$

гдѣ R обозначаетъ число, остающееся, при безпредѣльномъ возрастаніи N, конечнымъ. При выводѣ послѣдняго равенства Мертенсъ пользуется и тѣми изслѣдованіями Чебышева, о которыхъ шла рѣчь въ предыдущей главѣ и доказательствомъ теоремы объ ариѳметической прогрессіи Дирихле, при чемъ зависимости отъ счета классовъ ему еще устранить не удается. Во второмъ мемуарѣ, появившемся въ Запискахъ Берлинской Академіи Наукъ за 1896 г., онъ занимается приближеннымъ вычисленіемъ суммы

$$\sum_{2}^{N} \frac{\log q}{q},$$

гдѣ суммированіе распространено также исключительно на простыя числа формы

$$ax + b,$$

и на этотъ разъ всѣ необходимыя вспомогательныя предложенія уже устанавливаетъ независимо отъ счета классовъ.

Въ слѣдующихъ §§ мы даемъ, съ нѣкоторыми дополненіями и измѣненіями, изложеніе изысканій Мертенса.

§ 19. Условимся обозначать во всемъ дальнѣйшемъ черезъ a (цѣлое число большее 2) разность, а черезъ b (число взаимно простое съ a) — первый членъ той ариѳметической прогрессіи

$$b, \quad a+b, \quad 2a+b, \quad 3a+b, \ldots,$$

относительно которой и будетъ нами доказана теорема Дирихле. Суммы и ряды, изъ разсмотрѣнія которыхъ исходитъ Мертенсъ во второмъ своемъ мемуарѣ, зависятъ отъ тѣхъ же функцій, отъ которыхъ зависятъ и безконечныя произведенія Дирихле, а такъ какъ при опредѣленіи этихъ функцій и при выводѣ ихъ основныхъ свойствъ намъ придется воспользоваться нѣкоторыми предложеніями изъ теоріи сравненій, то мы считаемъ не лишнемъ предварительно остановиться на этихъ послѣднихъ. Пусть число a будетъ разложено на простые множители и пусть число различныхъ простыхъ множителей, входящихъ въ это разложеніе будетъ равно $k \geq 1$.

1-й случай: a не дѣлится на 8 и

$$a = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k},$$

гдѣ

$$p_1 \geq 2, \quad p_2 > 2, \ldots p_k > 2.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ, какъ извѣстно, каждое изъ чиселъ $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \ldots p_k^{\lambda_k}$ имѣетъ первообразные корни. Пусть g_1 будетъ первообразный корень числа $p_1^{\lambda_1}$, g_2 — числа $p_2^{\lambda_2}$ и т. д. Всякое число x, удовлетворяющее системѣ сравненій:

$$(1) \qquad \begin{cases} x \equiv g_1^{n_1} \pmod{p_1^{\lambda_1}} \\ x \equiv g_2^{n_2} \pmod{p_2^{\lambda_2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv g_k^{n_k} \pmod{p_k^{\lambda_k}}, \end{cases}$$

будучи взаимно простымъ съ каждымъ изъ чиселъ $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \ldots p_k^{\lambda_k}$, будетъ число взаимно простое и съ ихъ произведеніемъ, т. е. съ a, и какъ извѣстно, всѣ числа x, удовлетворяющія системѣ сравненій (1), будутъ всѣ сравнимы между собою по модулю a. Далѣе извѣстно, что если каждый изъ показателей n_t удовлетворяетъ условіямъ

$$0 \leq n_t \leq \varphi(p_t^{\lambda_t}) - 1,$$

гдѣ $\varphi(z)$, какъ принято въ теоріи сравненій, обозначаетъ число чиселъ меньшихъ цѣлаго положительнаго числа z и взаимно простыхъ съ нимъ, то всякое цѣлое число y, удовлетворяющее системѣ сравненій

$$y \equiv g_1^{m_1} \pmod{p_1^{\lambda_1}}$$

$$y \equiv g_2^{m_2} \pmod{p_2^{\lambda_2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y \equiv g_k^{m_k} \pmod{p_k^{\lambda_k}},$$

гдѣ

$$0 \leqq m_t \leqq \varphi(p_t^{\lambda_t}) - 1 \quad (t = 1, 2, \dots k)$$

будетъ тогда и только тогда сравнимо съ x по модулю a, когда

$$m_1 = n_1, \quad m_2 = n_2, \dots m_k = n_k.$$

Давая каждому изъ показателей n_t всѣ слѣдующія значенія

$$0, 1, 2, \dots, \varphi(p_t^{\lambda_t}) - 1$$

мы составимъ

$$\varphi(a) = \varphi(p_1^{\lambda_1})\, \varphi(p_2^{\lambda_2}) \dots \varphi(p_k^{\lambda_k})$$

такихъ различныхъ системъ сравненій, какъ система (1) и, принимая во вниманіе вышесказанное, можемъ утверждать, что каждое цѣлое число A, взаимно простое съ a, будетъ удовлетворять одной и только одной системѣ изъ числа $\varphi(a)$ составленныхъ нами системъ. Пусть A удовлетворяетъ слѣдующей системѣ сравненій

$$A \equiv g_1^{i_1} \pmod{p_1^{\lambda_1}}$$

$$A \equiv g_2^{i_2} \pmod{p_2^{\lambda_2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A \equiv g_k^{i_k} \pmod{p_k^{\lambda_k}}.$$

Число i_t называется, какъ извѣстно, индексомъ числа A по модулю $p_t^{\lambda_t}$. Присоединивъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ и 1 къ числу простыхъ чиселъ и согласившись считать 1 первообразнымъ корнемъ 1 и индексомъ всякаго числа по модулю 1 считать 0, мы систему чиселъ

$$0, i_1, i_2, \dots i_k$$

назовемъ индексомъ числа A по модулю a и введемъ слѣдующее символическое обозначеніе:

$$Ind_a A = (0, i_1, i_2, \dots i_k).$$

Приведемъ еще одно предложеніе, доказательство котораго никакихъ затрудненій не представляетъ: если каждое изъ чиселъ $A_1, A_2, \dots A_m$ взаимно простое съ a и

$$Ind_a A_1 = (0,\ i_{1,1},\ i_{2,1},\ \ldots\ i_{k,1})$$

$$Ind_a A_2 = (0,\ i_{1,2},\ i_{2,2},\ \ldots\ i_{k,2})$$

. . . .

$$Ind\ A_m = (0,\ i_{1,m},\ i_{2,m},\ \ldots\ i_{k,m}).$$

то положивъ

$$A_1 A_2 \ldots A_m = A,$$

найдемъ:

$$Ind_a A = (0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots\ i_m),$$

гдѣ

$$i_t \equiv i_{t,1} + i_{t,2} + \ldots + i_{t,m}\ (\mathrm{Mod}\ \varphi(p_t^{\lambda_t})\ (t = 1,\ 2 \ldots k).$$

2-й случай: число a дѣлится на 8 и

$$a = 2^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots . p_k^{\lambda_k},$$

гдѣ

$$\lambda_1 \geqq 3, \quad p_2 > 2, \quad p_3 > 2 \ldots . p_k > 2.$$

Извѣстно, что при $\lambda_1 \geqq 3$ число 2^{λ_1} не имѣетъ первообразныхъ корней, такъ какъ, всякое нечетное число c, при $\lambda_1 \geqq 3$, удовлетворяетъ сравненію:

$$c^{\frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda_1})} \equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 2^{\lambda_1}).$$

Но въ этомъ случаѣ извѣстно, что между числами

$$(l) \qquad 5^0,\ 5^1,\ 5^2,\ \ldots\ 5^{\frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda_1})-1},\ -5^0,\ -5^1,\ \ldots -5^{\frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda_1})-1}$$

нѣтъ сравнимыхъ между собою по модулю 2^{λ_1}. Слѣдовательно, каждое нечетное число будетъ сравнимо по модулю 2^{λ_1} съ однимъ и только съ однимъ изъ чиселъ (l). Положивъ

$$g_1 = 5$$

и обозначивъ черезъ $g_2,\ g_3 \ldots g_k$ первообразные корни соотвѣтственно чиселъ $p_2^{\lambda_2},\ p_3^{\lambda_3},\ \ldots p_k^{\lambda_k}$, найдемъ, что каждое цѣлое число A, взаимно простое съ a, удовлетворяетъ одной и только одной системѣ сравненій вида:

$$A \equiv (-1)^{\mu}\, g_1^{i_1}\ (\mathrm{Mod}\ 2^{\lambda_1})$$

$$A \equiv \qquad g_2^{i_2}\ (\mathrm{Mod}\ p_2^{\lambda_2})$$

. . . .

$$A \equiv \qquad g_k^{i_k}\ (\mathrm{Mod}\ p_k^{\lambda_k}),$$

гдѣ цѣлыя числа μ, i_1, i_2, ... i_k удовлетворяютъ условіямъ:

$$0 \leqq \mu \leqq 1$$
$$0 \leqq i_1 \leqq \frac{1}{2} \varphi(2^{\lambda_1}) - 1$$
$$0 \leqq i_2 \leqq \varphi(p^{\lambda_2}) - 1$$
$$0 \leqq i_3 \leqq \varphi(p^{\lambda_3}) - 1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \leqq i_k \leqq \varphi(p^{\lambda_k}) - 1.$$

Въ этомъ случаѣ индексомъ число A по модулю a назовемъ систему чиселъ

$$\mu, i_1, i_2, \dots i_k.$$

Сохраняя символическое обозначеніе

$$Ind_a A = (\mu, i_1, i_2, \dots i_k),$$

мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе, доказательство котораго какъ и его аналогичнаго, приведеннаго выше, ни какихъ затрудненій не представляетъ: если каждое изъ чиселъ $A_1, A_2, \dots A_m$ взаимно простое съ a и

$$Ind_a A_1 = (\mu_1, i_{1,1}, i_{2,1}, \dots i_{k,1})$$
$$Ind_a A_2 = (\mu_2, i_{1,2}, i_{2,2}, \dots i_{k,2})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Ind_a A_m = (\mu_m, i_{1,m}, i_{2,m}, \dots i_{k,m}),$$

то положивъ

$$A_1 A_2 \dots A_m = A,$$

найдемъ

$$Ind\, A = (\mu, i_1, i_2, \dots i_k),$$

гдѣ

$$\mu \equiv \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \pmod{2}$$
$$i_1 \equiv i_{1,1} + i_{1,2} + \dots + i_{1,m} \left(\mathrm{Mod}\ \frac{1}{2} \varphi(2^{\lambda_1})\right)$$
$$i_t \equiv i_{t,1} + i_{t,2} + \dots + i_{t,m} \left(\mathrm{Mod}\ p_t^{\lambda_t}\right) \ (t = 2, 3, \dots k).$$

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ слѣдующее заключеніе: если

$$a = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k},$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_k$ различныя простыя числа и

$$p_1 \geqq 2, \quad p_2 > 2, \ldots p_k > 2,$$

то всѣмъ цѣлымъ числамъ, сравнимымъ по мод. a съ однимъ и тѣмъ же числомъ A, взаимно простымъ съ a, соотвѣтствуетъ одна и только одна система чиселъ, которую мы называемъ индексомъ всѣхъ этихъ чиселъ по модулю a и которая состоитъ изъ $k+1$ чиселъ $\alpha, i_1, i_2, \ldots i_k$, гдѣ

$$\alpha = 0, \quad 0 \leqq i_t \leqq \varphi(p_t^{\lambda_t}) - 1 \quad (t = 1, 2, 3, \ldots k),$$

если a не дѣлится на 8 и

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq i_1 \leqq \frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda_1}) - 1, \quad 0 \leqq i_t \leqq \varphi(p_t^{\lambda_t}) - 1 \quad (t = 2, 3, \ldots k),$$

если a дѣлится на 8 и p^{λ_1} равно 2^{λ_1}.

§ 20. Пусть

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \varphi(p_1^{\lambda_1}), \ldots \rho_k = \varphi(p_k^{\lambda_k}),$$

если a не дѣлится на 8 и пусть

$$\rho_0 = 2, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda_1}), \quad \rho_2 = \varphi(p_2^{\lambda_2}) \ldots \rho_k = \varphi(p_k^{\lambda_k}),$$

если a дѣлится на 8. Далѣе пусть ω_0 обозначаетъ любой корень перваго, ω_1 — любой корень втораго и т. д. слѣдующихъ двучленныхъ уравненій

(2) $$x^{\rho_0} = 1, \quad x^{\rho_1} = 1, \ldots x^{\rho_k} = 1.$$

Если въ произведеніи

$$\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_k$$

каждому изъ множителей ω_t будемъ давать всѣ значенія, которыя онъ имѣетъ, то мы получимъ

$$\varphi(a) = \rho_0\, \rho_1 \ldots \rho_k$$

такихъ произведеній. Предположимъ, что всѣ эти произведенія расположены въ рядъ и что каждому изъ произведеній приписанъ значокъ, указывающій мѣсто, занимаемое произведеніемъ въ нашемъ рядѣ, при чемъ мы предполагаемъ, что первымъ членомъ ряда (слѣдовательно, значокъ котораго есть 1) является произведеніе, соотвѣтствующее случаю

$$\omega_0 = \omega_1 = \ldots = \omega_k = 1.$$

Если число A взаимно простое съ a и

$$Ind_a\, A = (\alpha,\ i_1,\ i_2,\ \ldots\ i_k),$$

то условимся черезъ $f_t(A)$ обозначать слѣдующее выраженіе

$$\omega_0^{\alpha}\ \omega_1^{i_1}\ \omega_2^{i_2}\ \ldots\ \omega_k^{i_k},$$

предполагая, что значокъ произведенія

$$\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \ldots\ \omega_k$$

есть

$$t+1.$$

Если же цѣлое число A не взаимно простое съ a, то каково бы ни было цѣлое число t, удовлетворяющее условіямъ

$$0 \leqq t \leqq \varphi(a) - 1$$

мы подъ $f_t(A)$ будемъ подразумѣвать 0. Функціи

$$f_0(A),\quad f_1(A),\ \ldots\ f_r(A),$$

гдѣ

$$r = \varphi(a) - 1$$

(во всемъ дальнѣйшемъ мы за r сохранимъ это же значеніе) и есть функціи Дирихле. Слѣдующія предложенія выражаютъ основныя свойства этихъ функцій.

1. Каковы бы ни были цѣлыя числа m и n, имѣемъ:

$$f_t(m)\, f_t(n) = f_t(mn).$$

Дѣйствительно, если по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ m и n не взаимно простое съ a, то предложеніе очевидно; если же оба они взаимно простыя съ a, то полагая

$$Ind_a\, m = (\alpha,\ i_1,\ i_2,\ \ldots .\ i_k)$$
$$Ind_a\, n = (\alpha',\ i'_1,\ i'_2,\ \ldots .\ i'_k)$$
$$Ind_a\, mn = (\alpha'',\ i''_1,\ i''_2,\ \ldots .\ i''_k)$$

и предполагая значокъ произведенія

$$\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \ldots .\ \omega_k$$

равнымъ

$$t+1,$$

найдемъ

$$f_t(m)\, f_t(n) = \omega_0^{\alpha+\alpha'}\, \omega_1^{i_1+i'_1}\, \omega_2^{i_2+i'_2} \ldots \omega_k^{i_k+i'_k}$$

или на основаніи предыдущаго § и уравненій (2)

$$f_t(m)\, f_t(n) = f_t(mn).$$

2. Если $t > 0$ и A цѣлыя числа, то

(3) $$f_t(A) + f_t(A+1) + \ldots + f_t(A+a-1) = 0.$$

Дѣйствительно, число чиселъ, взаимно простыхъ съ a и между собою не сравнимыхъ по модулю a, находящихся въ рядѣ

$$A,\quad A+1,\quad A+2, \ldots A+a-1$$

равно $\varphi(a)$. Такъ какъ по условію $t > 0$, то въ произведеніи

$$\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_k,$$

значокъ котораго есть

$$t+1,$$

не всѣ числа $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_k$ равны 1. Пусть ω_i будетъ одно изъ этихъ чиселъ не равное 1. Отбросивъ въ суммѣ (3) слагаемыя равныя нулю, мы, принимая во вниманіе § 19, найдемъ, что остальныя слагаемыя составятъ сумму, которую мы можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(\omega_i^0 + \omega_i^1 + \omega_i^2 + \ldots + \omega_i^{\rho_i - 1})\, M.$$

Но

$$\omega_i^0 + \omega_i^1 + \omega_i^2 + \ldots + \omega_i^{\rho_i - 1} = 0,$$

слѣдовательно, теорема доказана.

3. Если A, m и t цѣлыя числа и

$$m \geqq 0 \quad t > 0,$$

то

$$\mathrm{Mod}\,(f_t(A) + f_t(A+1) + \ldots + f_t(A+m)) \leqq \frac{1}{2}\,\varphi(a).$$

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго предложенія сумма

$$f_t(A) + f_t(A+1) + \ldots .\ f_t(A+m)$$

можетъ быть приведена къ виду

$$f_t(B) + f_t(B+1) + \ldots + f_t(B+n),$$

гдѣ

$$n \leqq a - 1,$$

а послѣдняя сумма — къ виду

$$f_t(B_1) + f_t(B_2) + \ldots + f_t(B_i),$$

гдѣ $B_1, B_2, \ldots B_i$ всѣ тѣ числа изъ ряда чиселъ

$$B, \quad B+1, \quad B+2, \ldots B+n,$$

которыя взаимно простыя съ a и

$$i \leqq \varphi(a).$$

Если

$$i = \varphi(a),$$

то предложеніе очевидно, такъ какъ на основаніи предыдущаго предложенія

$$f_t(B_1) + f_t(B_2) + \ldots + f_t(B_i) = 0.$$

Если же

$$i < \varphi(a),$$

то присоединяя къ числамъ $B_1, B_2, \ldots B_i$, числа $B_{i+1}, B_{i+2}, \ldots B_{\varphi(a)}$ взаимно простыя съ a и находящіяся въ рядѣ чиселъ

$$B+n+1, \quad B+n+2, \ldots B+a-1,$$

мы на основаніи предыдущаго предложенія найдемъ

$$\text{Mod}\,(f_t(B_1) \quad + f_t(B_2) \quad + \ldots + f_t(B_i)) =$$
$$\text{Mod}\,(f_t(B_{i+1}) + f_t(B_{i+2}) + \ldots + f_t(B_{\varphi(a)}));$$

а такъ какъ при A взаимно простомъ съ a

$$\text{Mod}\, f_t(A) = 1$$

и число слагаемыхъ въ одной изъ суммъ

$$f_t(B_1) \quad + f_t(B_2) \quad + \ldots + f_t(B_i)$$
$$f_t(B_{i+1}) + f_t(B_{i+2}) + \ldots + f_t(B_{\varphi(a)})$$

не превышаетъ $\frac{1}{2}\varphi(a)$, то, слѣдовательно, предложеніе доказано.

4. Если $b_0, b_1, b_2, \ldots b_m$ обозначаютъ положительныя числа и

$$b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \ldots \geqq b_m,$$

то

$$\text{Mod}\,[b_0 f_t(A) + b_1 f_t(A+1) + \ldots + b_m f_t(A+m)] \leqq \frac{1}{2} b_0 \varphi(a).$$

Дѣйствительно, имѣемъ тождество:

$$b_0 f_t(A) + b_1 f_t(A+1) + \ldots\ldots + b_m f_t(A+m) =$$

$$(b_0 - b_1) f_t(A) + (b_1 - b_2)\big(f_t(A) + f_t(A+1)\big) + \ldots\ldots$$

$$+ (b_{m-1} - b_m)\big(f_t(A) + f_t(A+1) + \ldots + f_t(A+m-1)\big) + b_m f_t(A+m)$$

и слѣдовательно

$$\text{Mod}\,[(b_0 f_t(A) + b_1 f_t(A+1) + \ldots + b_m f_t(A+m))] \leqq$$

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \ldots + (b_{m-1} - b_m) + b_m]\,\frac{1}{2}\varphi(a) = \frac{1}{2} b_0 \varphi(a).$$

5. Сумма

$$f_0(A) + f_1(A) + f_2(A) + \ldots + f_2(A),$$

равна $\varphi(a)$, если A удовлетворяетъ сравненію

$$A \equiv 1 \ (\text{Mod } a)$$

и равна 0, если A этому сравненію не удовлетворяетъ. Дѣйствительно, полагая въ первомъ случаѣ

$$Ind_a\, A = (\alpha, i_1, i_2, \ldots i_k)$$

и замѣчая, что $Ind_a\, A$ въ этомъ случаѣ тождественень съ $Ind_a\, 1$, мы найдемъ

$$\mu = 0, \quad i_1 = i_2 = \ldots = i_k = 0$$

и, слѣдовательно,

$$f_0(A) = f_1(A) = \ldots = f_r(A) = 1,$$

а потому

$$f_0(A) + f_1(A) + \ldots + f_r(A) = \varphi(a).$$

Во второмъ случаѣ, если A не взаимно простое число съ a, то предложеніе очевидно. Если же число A взаимно простое съ a, то полагая

$$Ind_a\, A = (\alpha, i_1, i_2, \ldots i_k),$$

будемъ имѣть слѣдующее равенство

$$f_0(A)+f_1(A)+\ldots+f_r(A)=$$
$$\sum \omega_0^{\mu}\,\omega_1^{i_1}\,\omega_2^{i_2}\ldots\omega_k^{i_k},$$

гдѣ суммированіе по ω_0 распространено на всѣ корни перваго изъ уравненій (2), — по ω_1 — на всѣ корни втораго и т. д.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ будутъ всѣ корни одного изъ нашихъ уравненій (2), при чемъ мы предположимъ, что показатель l, съ которымъ всѣ эти корни входятъ множителями въ слагаемыя суммы

$$\sum \omega_0^{\alpha}\,\omega_1^{i_1}\ldots\omega_k^{i_k}$$

не равенъ 0. Что по крайней мѣрѣ одно такое уравненіе должно находиться въ числѣ уравненій (2), то это слѣдуетъ изъ условій

$$A \text{ не} \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ a)$$

и $a > 2$. Но сумма

$$\sum \omega_0^{\alpha}\,\omega_1^{i_1}\ldots\omega_k^{i_k}$$

можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$\sum \omega_0^{\alpha}\,\omega_1^{i_1}\ldots\omega_k^{i_k}=(\alpha_1^{l}+\alpha_2^{l}+\ldots+\alpha_m^{l})\,Q,$$

гдѣ a обозначаетъ выраженіе, зависящее отъ корней остальныхъ уравненій, и, слѣдовательно, эта сумма равна 0. Такимъ образомъ предложеніе доказано вполнѣ.

6. Если $t>0$, то ряды

$$(5)\qquad L_t=\frac{f_t(1)}{1}+\frac{f_t(2)}{2}+\frac{f_t(3)}{3}+\frac{f_t(4)}{4}+\ldots\ldots$$

$$(6)\qquad M_t=\frac{f_t(2)\log 2}{2}+\frac{f_t(3)\log 3}{3}+\frac{f_t(4)\log 4}{4}+\ldots\ldots$$

сходящіеся. Дѣйствительно, какъ бы велико число $\mu' > \mu$ ни было, на основаніи предложенія (4) имѣемъ:

$$\mathrm{Mod}\left(\frac{f_t(\mu)}{\mu}+\frac{f_t(\mu+1)}{\mu+1}+\ldots+\frac{f_t(\mu')}{\mu'}\right)\leqq\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(a)}{\mu}$$

и (при $\mu\geqq 3$)

$$\mathrm{Mod}\left(\frac{f_t(\mu)\log\mu}{\mu}+\frac{f_t(\mu+1)\log(\mu+1)}{\mu+1}+\ldots+\frac{f_t(\mu')\log\mu'}{\mu'}\right)\leqq\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(a)\log\mu}{\mu}.$$

Слѣдовательно, какъ бы мало ни было число $\alpha > 0$, при достаточно большомъ μ и всякомъ цѣломъ $\mu' > \mu$, мы будемъ имѣть:

$$\text{Mod}\left(\frac{f_t(\mu)}{\mu} + \frac{f_t(\mu+1)}{\mu+1} + \ldots + \frac{f_t(\mu')}{\mu'}\right) < \alpha$$

$$\text{Mod}\left(\frac{f_t(\mu)\log\mu}{\mu} + \frac{f_t(\mu+1)\log(\mu+1)}{\mu+1} + \ldots + \frac{f_t(\mu')\log\mu'}{\mu'}\right) < \alpha$$

и значитъ предложеніе доказано.

Имъ мы исчерпываемъ тѣ основныя свойства функцій $f_0(A)$, $f_1(A), \ldots f_2(A)$, которыя намъ необходимы для дальнѣйшаго.

Замѣчаніе. Ряды (5) и (6) принадлежатъ Дирихле. Ближайшая наша задача будетъ состоять въ томъ, чтобы доказать, что ни одно изъ чиселъ $L_1, L_2, \ldots L_r$ не равно 0, такъ какъ при окончательныхъ заключеніяхъ это обстоятельство будетъ играть весьма важную роль. Для полученія этого результата намъ придется, слѣдуя Мертенсу, разсмотрѣть нѣкоторыя суммы и установить связь между послѣдними и числами $L_1, L_2, \ldots L_r$. (Обозначенія L_t и M_t и во всемъ дальнѣйшемъ будутъ имѣть этотъ же смыслъ).

§ 21. Лемма. Если положимъ

$$\sum f_1(a_1) f_2(a_2) \ldots f_r(a_r) = S(A),$$

гдѣ $A \geqq 1$ цѣлое число и суммированіе въ лѣвой части распространено на всѣ различныя разложенія числа A на r цѣлыхъ и положительныхъ множителей $a_1, a_2, \ldots a_r$, то

$$\text{Mod}\,\Phi(m) = \text{Mod}\,[S(1) + S(2) + \ldots + S(m)] \leqq \frac{r\varphi(a)}{2} m^{\frac{r-1}{r}} \left(1 + \frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}.$$

Замѣчаніе. Два разложенія числа A на множители мы считаемъ различными, если они отличаются или порядкомъ множителей или по крайней мѣрѣ однимъ множителемъ.

Доказательство. Мы предположимъ сперва, что r и m больше 1. Сумма

$$S(1) + S(2) + \ldots + S(m),$$

обозначенная нами черезъ $\Phi(m)$, состоитъ, очевидно, изъ всѣхъ произведеній вида

$$(\alpha) \qquad f_1(a_1) f_2(a_2) \ldots f_r(a_r),$$

гдѣ цѣлыя числа $a_1, a_2, \ldots a_r$ удовлетворяютъ условіямъ:

$$a_1 \geqq 1, \quad a_2 \geqq 1, \ldots a_r \geqq 1$$
$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_r \leqq m.$$

Выберемъ изъ $\Phi(m)$ всѣ тѣ слагаемыя, въ которыхъ числа $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ не превосходятъ числа

$$\nu = E\sqrt[r]{m}.$$

Сумму всѣхъ выбранныхъ членовъ обозначимъ черезъ Σ_r. Она въ свою очередь можетъ быть представлена въ видѣ суммы членовъ такого вида

$$\beta = f_1(a_1) f_2(a_2) \ldots f_{r-1}(a_{r-1}) \left[f_r(1) + f_r(2) + \ldots + f_r\left(E\frac{m}{a_1 a_2 \ldots a_{r-1}}\right)\right].$$

Такъ какъ каждое изъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ имѣетъ ν значеній $1, 2, \ldots \nu$, то число такихъ членовъ β, составляющихъ сумму Σ_r, равно ν^{r-1}; замѣчая же, что на основаніи третьяго предложенія предыдущаго §

$$\operatorname{Mod} \beta \leqq \frac{1}{2}\varphi(a),$$

находимъ:

$$\operatorname{Mod} \sum\nolimits_r \leqq \frac{1}{2}\varphi(a)\,\nu^{r-1} \leqq \frac{1}{2}\varphi(a)\, m^{\frac{r-1}{r}}.$$

Условимся далѣе черезъ Σ_t, гдѣ t имѣетъ любое изъ значеній $1, 2, \ldots r-1$, обозначать сумму всѣхъ тѣхъ слагаемыхъ вида (α), входящихъ въ $\Phi(m)$, въ которыхъ первымъ числомъ, превосходящимъ ν, является число a_t. Отбросивъ изъ числа чиселъ $a_1, a_2 \ldots a_r$ число a_t и обозначивъ произведеніе остальныхъ черезъ l, а изъ числа функцій $f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots f_r(a_r)$ — функцію $f_t(a_t)$ и обозначивъ произведеніе остальныхъ черезъ Q, мы можемъ сумму Σ_t представить въ видѣ суммы членовъ β такого вида:

$$\beta = Q\left[f_t(\nu+1) + f_t(\nu+2) + \ldots + f_t\left(E\frac{m}{l}\right)\right].$$

Число такихъ членовъ β не превосходитъ числа всѣхъ различныхъ цѣлыхъ положительныхъ (0 исключается) рѣшеніи неравенства

$$b_1 b_2 \ldots b_{r-1} \leqq \frac{m}{\nu+1},$$

а, слѣдовательно, и по давно числа различныхъ рѣшеній такого неравенства:

$$(\alpha')\; b_1 b_2 \ldots b_{r-1} \leqq m^{\frac{r-1}{r}},$$

при чемъ двѣ системы рѣшеній этого неравенства $x_1, x_2, \ldots x_{r-1}$ и $x'_1, x'_2, \ldots x'_{r-1}$ мы считаемъ только тогда одинаковыми, если

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \ldots x_{r-1} = x'_{r-1}.$$

Пусть $P(A)$ обозначаетъ число всѣхъ различныхъ разложеній числа A на $r-1$ множителей. Очевидно, что число различныхъ рѣшеній неравенства (α') будетъ равно

$$P(1)+P(2)+\ldots+P(n),$$

гдѣ

$$n=Em^{\frac{r-1}{r}}$$

и слѣдовательно, будетъ менѣе

$$n\left[\frac{P(1)}{1}+\frac{P(2)}{2}+\ldots+\frac{P(n)}{n}\right].$$

Замѣчая же, что если раскрыть выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^{r-1},$$

то въ числѣ слагаемыхъ будутъ находиться всѣ числа

$$\frac{P(1)}{1},\quad \frac{P(2)}{2},\ldots\ \frac{P(n)}{n},$$

мы заключаемъ, что

$$n\left[\frac{P(1)}{1}+\frac{P(2)}{2}+\ldots+\frac{P(n)}{n}\right]\leqq n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^{r-1}$$

(равенство имѣетъ мѣсто только въ случаѣ $n=1$), а, слѣдовательно, и подавно

$$n\left[\frac{P(1)}{1}+\frac{P(2)}{2}+\ldots+\frac{P(n)}{n}\right]\leqq n\,(1+\log n)^{r-1},$$

а такъ какъ

$$n=Em^{\frac{r-1}{r}},$$

то

$$n\,(1+\log n)^{r-1}<m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}$$

и значитъ

$$n\left[\frac{P(1)}{1}+\frac{P(2)}{2}+\ldots+\frac{P(n)}{n}\right]<m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}.$$

Итакъ, число различныхъ рѣшеній неравенства (α'), а слѣдовательно и число всѣхъ членовъ β, составляющихъ сумму Σ_t менѣе числа

$$m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}.$$

Но на основанiи третьяго предложенiя предыдущаго §

$$\text{Mod}\,\beta \leqq \frac{1}{2}\,\varphi(a),$$

а потому

$$\text{Mod}\sum_t < \frac{1}{2}\,\varphi(a)\,m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}.$$

Принимая во вниманiе равенство

$$\Phi(m) = \sum_1 + \sum_2 + \ldots + \sum_r,$$

и полученные результаты находимъ слѣдующее неравенство:

$$\Phi(m) < \frac{r}{2}\,\varphi(a)\,m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}.$$

Остается разсмотрѣть тѣ случаи, когда одно или оба числа r и m равны 1. Если $r=1$ и $m \geqq 1$, то $\Phi(m)$ приводится къ суммѣ

$$f_1(1) + f_1(2) + \ldots + f_1(m)$$

и, слѣдовательно,

$$\text{Mod}\,\Phi(m) \leqq \frac{1}{2}\,\varphi(a).$$

Если же $m=1$ и $r \geqq 1$, то

$$\Phi(1) = S(1) = 1.$$

Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ имѣемъ:

$$\Phi(m) \leqq \frac{r}{2}\,\varphi(a)\,m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1},$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствiе. Ряды

$$S = S(1) + \frac{1}{2}\,S(2) + \frac{1}{3}\,S(3) + \ldots\ldots$$

$$T = \frac{\log 2}{2}\,S(2) + \frac{\log 3}{3}\,S(3) + \frac{\log 4}{4}\,S(4) + \ldots\ldots$$

сходящiеся. (Обозначенiя S и T будутъ имѣть и въ дальнѣйшемъ этотъ же смыслъ).

Доказательство. Пусть n и n' обозначаютъ два цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ условiямъ

$$n \geqq 1 \quad n' \geqq n+1.$$

На основаніи доказаннаго предложенія

$$\text{Mod}\,[S\,(n+1)+S\,(n+2)+\ldots+S\,(n')]$$

равный

$$\text{Mod}\,[\Phi(n')-\Phi(n)]$$

будетъ менѣе или равенъ

$$r\,\varphi(a)\,n'^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log n'\right)^{r-1}$$

и слѣдовательно, въ частномъ случаѣ, когда

$$n'=n+1=m$$

имѣемъ

$$\text{Mod}\,S(m)\leqq r\,\varphi(a)\,m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}.$$

Далѣе, принимая во вниманіе тождество

$$d_{n+1}\,S(n+1)+d_{n+2}\,S(n+2)+\ldots+d_m\,S(m)=$$
$$S(n+1)\,[d_{n+1}-d_{n+2}]+\big(S(n+1)+S(n+2)\big)\,(d_{n+2}-d_{n+3})+\ldots.$$
$$+\big(S(n+1)+S(n+2)+\ldots+S(m-1)\big)\,(d_{m-1}-d_m)+$$
$$\big(S(n+1)+S(n+2)+\ldots+S(m)\big)\,d_m$$

и предполагая

$$0<d_{n+1}\geqq d_{n+2}\geqq\ldots\ldots\geqq d_m,$$

находимъ слѣдующее неравенство:

$$\text{Mod}\,[d_{n+1}\,S(n+1)+d_{n+2}\,S(n+2)+\ldots+d_m\,S(m)]\leqq$$
$$r\,\varphi(a)\,\Big[(n+1)^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log\,(n+1)\right)^{r-1}(d_{n+1}-d_{n+2})+$$
$$+(n+2)^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log\,(n+2)\right)^{r-1}(d_{n+2}-d_{n+3})+$$
$$+\ldots\ldots+(m-1)^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log\,(m-1)\right)^{r-1}(d_{m-1}-d_m)+$$
$$+m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}d_m\Big].$$

Если положимъ

$$d_k=\frac{1}{k},$$

то при $k \geqq 1$

$$d_k - d_{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} < \frac{1}{k^2};$$

если же положимъ

$$d_k = \frac{\log k}{k},$$

то при $k \geqq 3$

$$d_k - d_{k+1} = \frac{\log k - k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k(k+1)} < \frac{\log k}{k^2}.$$

Слѣдовательно, полагая

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{k} S(k) \quad \text{и} \quad R'_n = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{\log k}{k} S(k)$$

имѣемъ: (при $n \geqq 1$)

$$\text{Mod } R_n \leqq r\, \varphi(a) \left[\frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log(n+1)\right)^{r-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} + \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log(n+2)\right)^{r-1}}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}} + \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log(m-1)\right)^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}} + \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{r}}} \right]$$

и (при $n \geqq 2$)

$$\text{Mod } R'_n \leqq r\, \varphi(a) \left[\frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log(n+1)\right)^{r-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} \log(n+1) + \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log(m-1)\right)^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}} + \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r} \log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{r}}} \log m \right].$$

Отсюда, предположивъ

$$\log(n+1) > r$$

и замѣтивъ, что при $\log k > r$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$1 + \frac{r-1}{r} \log k < \log k,$$

находимъ:

$$\text{Mod}\, R_n < r\,\varphi(a)\left[\frac{\log^{r-1}(n+1)}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\log^{r-1}(n+2)}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{\log^{r-1}(m-1)}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\log^{r-1} m}{m^{\frac{1}{r}}}\right]$$

$$\text{Mod}\, R'_n < r\,\varphi(a)\left[\frac{\log^{r}(n+1)}{(n+1)^{1-\frac{1}{r}}}+\frac{\log^{r}(n+2)}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{\log^{r}(m-1)}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\log^{r} m}{m^{\frac{1}{r}}}\right].$$

Слѣдовательно, какъ бы мало ни было число $\alpha > 0$, при достаточно большомъ n и всякомъ цѣломъ m большемъ n будемъ имѣть неравенства

$$\text{Mod}\, R_n < \alpha, \quad \text{Mod}\, R'_n < \alpha.$$

Такимъ образомъ предложеніе доказано.

§ 22. Лемма. Если положимъ

$$\sum S(\delta) = F(A),$$

гдѣ суммированіе по δ распространено на всѣ дѣлители цѣлаго числа $A \geqq 1$, то полагая

$$\Theta(m) = F(1) + \frac{1}{2}F(2) + \frac{1}{3}F(3) + \ldots + \frac{1}{m}F(m),$$

найдемъ:

$$\Theta(m) = (\log m + C)\,S - T + \alpha_m,$$

гдѣ S и T имѣютъ предыдущее значеніе, C — постоянная Ейлера и

$$[\lim \alpha_m]_{m=\infty} = 0.$$

Доказательство. Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$E\frac{m}{k} = m_k, \quad E\sqrt{m} = \mu,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} = \psi(n)$$

$$M = S(1)\,\psi(m_1) + \frac{1}{2}S(2)\,\psi(m_2) + \ldots + \frac{1}{\mu}S(\mu)\,\psi(m_\mu)$$

$$N = \frac{1}{\mu+1}S(\mu+1)\,\psi(m_{\mu+1}) + \frac{1}{\mu+2}S(\mu+2)\,\psi(m_{\mu+2}) + \ldots + \frac{1}{m}S(m)\,\psi(m_m).$$

Функція $\Theta(m)$ можетъ быть представлена въ слѣдующей формѣ:

$$\Theta(m) = S(1)\,\psi(m_1) + \frac{1}{2}S(2)\,\psi(m_2) + \ldots + \frac{1}{m}S(m)\,\psi(m_m)$$

и, слѣдовательно,

$$\Theta(m) = M + N.$$

Положимъ для всякаго цѣлаго значенія $n \geqq 1$

$$\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \psi_1(n).$$

Тогда очевидно будемъ имѣть

$$\psi(m_k) = \psi_1(m_k) + \log(1 + m_k)$$

и, слѣдовательно,

$$(\alpha)\quad \psi(m_k) - \log m - \psi_1(m) + \log k = \log(1 + m_k) - \log\frac{m}{k} - (\psi_1(m) - \psi_1(m_k)).$$

Но

$$\log(1 + m_k) - \log\frac{m}{k} > 0$$

и

$$\log(1 + m_k) - \log\frac{m}{k} < \log\left(1 + \frac{m}{k}\right) - \log\frac{m}{k} < \frac{k}{m}.$$

Далѣе

$$\psi_1(m) - \psi_1(m_k) = b_{m_k+1} + b_{m_k+2} + \ldots + b_m,$$

а такъ какъ

$$b_n = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \ldots > 0$$

и

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

то

$$b_{m_k+1} + b_{m_k+2} + \ldots + b_m > 0 \quad \text{и} \quad < \frac{1}{2m_k},$$

а слѣдовательно и подавно менѣе $\frac{k}{m}$. Отсюда заключаемъ, что выраженіе

въ правой части равенства (α) по абсолютному значенію менѣе $\frac{k}{m}$, а потому

$$\psi(m_k) - (\log m + \psi_1(m)) - \log k = \beta_k,$$

гдѣ

$$\mathrm{Mod}\ \beta_k < \frac{k}{m}.$$

Умножая обѣ части послѣдняго равенства на $\frac{1}{k}\,S(k)$ и суммируя по k отъ $k=1$ до $k=\mu$, приходимъ къ слѣдующему равенству:

$$M - (\log m + \psi_1(m))\left(S(1) + \frac{1}{2}S(2) + \ldots + \frac{1}{\mu}S(\mu)\right) +$$

$$S(2)\frac{\log 2}{2} + S(3)\frac{\log 3}{3} + \ldots + S(\mu)\frac{\log \mu}{\mu} =$$

$$\beta_1 S(1) + \frac{1}{2}\beta_2 S(2) + \frac{1}{3}\beta_3 S(3) + \ldots + \frac{1}{\mu}\beta_\mu S(\mu).$$

Полагаемъ

$$S(1) + \frac{1}{2}S(2) + \ldots + \frac{1}{\mu}S(\mu) = S - R_\mu$$

$$S(2)\frac{\log 2}{2} + S(3)\frac{\log 3}{3} + \ldots + S(\mu)\frac{\log \mu}{\mu} = T - R'_\mu$$

$$\psi_1(m) = C + \gamma_m,$$

гдѣ C постоянная Эйлера и

$$[\lim \gamma_m]_{m=\infty} = 0.$$

Замѣчая, что

$$\mathrm{Mod}\left[\beta_1 S(1) + \frac{1}{2}\beta_2 S(2) + \ldots + \frac{1}{\mu}\beta_\mu S(\mu)\right] \leqq$$

$$\mathrm{Mod}\ \beta_1 S(1) + \mathrm{Mod}\frac{\beta_2}{2}S(2) + \ldots + \mathrm{Mod}\frac{\beta_\mu}{\mu}S(\mu) \leqq$$

$$\frac{1}{m}\left[\mathrm{Mod}\ S(1) + \mathrm{Mod}\ S(2) + \ldots + \mathrm{Mod}\ S(\mu)\right] \leqq$$

$$\frac{1}{m}\left[\mu r \varphi(a) \mu^{\frac{r-1}{r}}\left(1 + \frac{r-1}{r}\log \mu\right)^{r-1}\right] \leqq \frac{r\varphi(a)\left(1 + \frac{r-1}{2r}\log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{2r}}},$$

имѣемъ

$$\beta_1 S(1) + \frac{1}{2}\beta_2 S(2) + \ldots + \frac{1}{\mu}\beta_\mu S(\mu) = \gamma'_m,$$

гдѣ

$$(\lim \gamma'_m)_{m=\infty} = 0.$$

Слѣдовательно,

$$M-(\log m+C+\gamma_m)(S-R_\mu)+T-R'_\mu=\gamma'_m;$$

и значитъ

$$M=(\log m+C)\,S-T+\gamma''_m,$$

гдѣ

$$\lim \gamma''_m=0,$$

такъ какъ

$$(\lim R_\mu)_{m=\infty}=(\lim R'_\mu)_{m=\infty}=0,$$

$$\operatorname{Mod} R_\mu \log m < r\,\varphi(a)\left[\frac{\log^{r-1}(\mu+1)}{(\mu+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\log^{r-1}(\mu+2)}{(\mu+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\ldots\right]\log(\mu+1)^2,$$

а потому и

$$\lim (R_\mu \log m)_{m=\infty}=0.$$

Далѣе на основаніи равенства

$$N=S(\mu+1)\left[\frac{\psi(m_{\mu+1})}{\mu+1}-\frac{\psi(m_{\mu+2})}{\mu+2}\right]+$$

$$+\left[S(\mu+1)+S(\mu+2)\right]\left[\frac{\psi(m_{\mu+2})}{\mu+2}-\frac{\psi(m_{\mu+3})}{\mu+3}\right]+\ldots\left[S(\mu+1)+\right.$$

$$\left.+S(\mu+2)+\ldots+S(m-1)\right]\left[\frac{\psi(m_{m-1})}{m-1}-\frac{\psi(m_m)}{m}\right]+\left[S(\mu+1)+\right.$$

$$\left.+S(\mu+2)+\ldots+S(m)\right]\frac{\psi(m_m)}{m};$$

и неравенствъ

$$0<\frac{\psi(m_{\mu+\lambda})}{\mu+\lambda}-\frac{\psi(m_{\mu+\lambda+1})}{\mu+\lambda+1}<\frac{\psi(m_{\mu+\lambda})}{(\mu+\lambda)^2}<\frac{1+\log m}{(\mu+\lambda)^2},$$

гдѣ

$$1\leqq\lambda\leqq m-(\mu+1),$$

имѣемъ слѣдующее неравенство

$$\operatorname{Mod} N<r\,\varphi(a)(1+\log m)\left[\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(\mu+1)\right)^{r-1}}{(\mu+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\left[1+\frac{r-1}{r}\log(\mu+2)\right]^{r-1}}{(\mu+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\left[1+\frac{r-1}{r}\log(m-1)\right]^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\left[1+\frac{r-1}{r}\log m\right]^{r-1}}{\frac{1}{m^{r}}}\right].$$

Слѣдовательно,

$$(\lim N)_{m=\infty} = 0,$$

а такъ какъ

$$\Theta(m) = M + N,$$

то предложеніе доказано. Для дальнѣйшаго необходимо еще доказать, что

$$\Theta(m) \geqq 1.$$

Чтобы получить это неравенство, замѣтимъ предварительно слѣдующее свойство функціи, обозначенной нами въ этомъ § черезъ $F(A)$: если t и t' цѣлыя взаимно простыя числа, то

$$F(tt') = F(t)\, F(t').$$

Дѣйствительно, если t и t' число взаимно простыя, то давая въ выраженіи

$$\delta\delta'$$

числу δ всѣ значенія, равныя каждому изъ дѣлителей числа t, а числу δ' — числа t', мы получимъ всѣхъ дѣлителей числа tt'. Отсюда въ силу опредѣленія функціи $F(A)$ и § 20, 1 предложеніе и вытекаетъ справедливость предыдущаго равенства.

Пусть теперь

$$m = q^\lambda,$$

гдѣ q простое число. По опредѣленію функціи $F(m)$ имѣемъ:

$$F(q^\lambda) = S(1) + S(q) + S(q^2) + \ldots + S(q^\lambda).$$

Положимъ

$$(d) \qquad \mu(x) = \frac{1}{(1-x)\,(1-x f_1(q))\,(1-x f_2(q))\ldots(1-x f_r(q))}.$$

Если число a дѣлится на q, то

$$\mu(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Предположимъ, что a не дѣлится на q и пусть n обозначаетъ показатель, къ которому принадлежитъ число q по модулю a. Модуль числа x предположимъ меньшимъ 1.

Разлагая $\mu(x)$ по возрастающимъ степенямъ x, имѣемъ:

$$\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[x^\lambda \sum f_1(q^{l_1})\, f_2 q^{l_2}) \ldots f_r(q^{l_r})\right],$$

гдѣ въ выраженіи

$$\sum f_1(q^{l_1})\, f_2(q^{l_2}) \ldots f_r(q^{l_r}),$$

служащемъ коэфиціентомъ при x^λ, суммированіе по $l_1, l_2, \ldots l_r$ распространяется на всѣ цѣлыя положительныя числа, включая и 0, удовлетворяющія неравенству

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_r \leqq \lambda,$$

при чемъ двѣ системы рѣшеній этого неравенства

$$l_1' + l_2' + \ldots + l_r' \leqq \lambda$$
$$l_1'' + l_2'' + \ldots + l_r'' \leqq \lambda$$

мы считаемъ только тогда одинаковыми, когда

$$l_1' = l_1'', \quad l_2' = l_2'', \ldots l_r' = l_r''.$$

Но очевидно, что и $F(q^\lambda)$ есть точно такая же сумма

$$\sum f_1(q_1^{l_1})\, f_2(q^{l_2}) \ldots f_r(q^{l_r}),$$

слѣдовательно коэфиціентъ въ нашемъ разложеніи при x^λ и есть $F(q^\lambda)$. Беря логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства (d), разлагая логариѳмы во второй части получаемаго равенства въ ряды, и замѣчая, (§ 20 n⁰ 5) что сумма

$$1 + [f_1(q)]^m + [f_2(q)]^m + \ldots + [f_r(q)]^m = f_0(q^m) + f_1(q^m) + \ldots + f_r(q^m)$$

равна $\varphi(a)$, если

$$q^m \equiv 1 \ (\text{Mod } a),$$

т. е. если m дѣлится на n (показатель, къ которому принадлежитъ число q по модулю a) и равна O, если

$$q^m \text{ не} \equiv 1 \ (\text{Mod } a)$$

приходимъ къ такому равенству:

$$\log \mu(x) = \frac{\varphi(a)}{n}\left(x^n + \frac{1}{2}x^{2n} + \frac{1}{3}x^{3n} + \ldots\right) = \log\,(1 - x^n)^{\frac{-\varphi(a)}{n}}$$

и, слѣдовательно,

$$\mu(x) = (1 - x^n)^{\frac{-\varphi(a)}{n}}.$$

6*

Отсюда заключаемъ, что число $F(q^\lambda)$ не можетъ быть отрицательнымъ, а слѣдовательно и каково бы ни было цѣлое положительное число m $F(m)$ число не отрицательное, потому что, какъ мы замѣтили выше,

$$F(m) = F(q_1^{t_1})\, F(q_2^{t_2}) \ldots . F(q_i^{t_i}),$$

гдѣ $q_1, q_2, \ldots q_i$ простыя числа и

$$m = q_1^{t_1}\, q_2^{t_2} \ldots q_i^{t_i}.$$

Но

$$F(1) = 1,$$

а потому

$$\Theta(m) \geqq 1,$$

такъ какъ

$$\Theta(m) \geqq F(1).$$

§ 23. Лемма. Если $m+1$ есть значокъ такого произведенія

$$\omega_0\, \omega_1 \ldots \omega_r$$

(§ 20), въ которомъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей есть число мнимое, то число

$$L_m = \frac{f_m(1)}{1} + \frac{f_m(2)}{2} + \frac{f_m(3)}{3} + \ldots . .$$

не равно 0.

Доказательство. Пусть t будетъ цѣлое число большее 1 и

$$E \sqrt[r]{t} = \nu;$$

кромѣ того введемъ еще r функцій $\varphi_1(A), \varphi_2(A), \ldots . \varphi_r(A)$, опредѣляющихся для всякаго цѣлаго числа A слѣдующимъ образомъ: l изъ этихъ функцій $(0 \leqq l \leqq r)$ опредѣляются равенствами

$$\varphi_k(A) = f_k(A),$$

а остальныя $r-l$ — равенствами

$$\varphi_i(A) = f_i(A) \log A.$$

Слѣдовательно, модуль каждой изъ первыхъ l функцій равенъ 1, а модуль каждой изъ остальныхъ равенъ $\log A$. Пусть далѣе

$$\sum \varphi_1(a_1)\, \varphi_2(a_2) \ldots \varphi_r(a_r) = S_1(A),$$

гдѣ суммированіе по $a_1, a_2, \ldots a_r$ распространено на всѣ различныя разложенія числа A на r цѣлыхъ положительныхъ множителей:

$$A = a_1\, a_2 \ldots a_r,$$

и

$$P_n(\nu) = \varphi_n(1) + \frac{\varphi_n(2)}{2} + \frac{\varphi_n(3)}{3} + \ldots + \frac{\varphi_n(\nu)}{\nu}.$$

Разсмотримъ слѣдующую сумму

$$F(t) = S_1(1) + \frac{1}{2} S_1(2) + \ldots + \frac{1}{t} S_1(t).$$

Она состоитъ изъ всѣхъ выраженій вида

$$(\alpha) \qquad \frac{\varphi_1(a_1)\, \varphi_2(a_2) \ldots \varphi_r(a_r)}{a_1\, a_2 \ldots a_r},$$

гдѣ

$$a_1\, a_2 \ldots a_r \leqq t.$$

Всѣ выраженія вида (α), въ которыхъ ни одно изъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots a_r$ не превышаетъ ν, собиремъ въ одну группу. Сумма членовъ этой группы, какъ легко видѣть, равна

$$P_1(\nu)\, P_2(\nu) \ldots P_r(\nu).$$

Остальныя выраженія вида (α), составляющія сумму $F(t)$, распредѣлимъ на r группъ и пусть $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_r$ обозначаютъ суммы членовъ соотвѣтственно 1-й, 2-й, ... r-й группы, при чемъ въ группу, сумма членовъ которой равна Σ_k, входятъ всѣ тѣ и только тѣ выраженія вида (α), въ которыхъ первымъ числомъ, превышающимъ ν, является число a_k. Далѣе пусть изъ числа функцій $\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2) \ldots \varphi_r(a_r)$ будетъ исключена функція $\varphi_k(a_k)$ и произведеніе остальныхъ обозначено черезъ Q_{a_k}. Сумма Σ_k состоитъ, очевидно, изъ слагаемыхъ β такого вида:

$$\beta = \frac{Q_{a_k}}{v}\left(\frac{\varphi_k(\nu+1)}{\nu+1} + \frac{\varphi_k(\nu+2)}{\nu+2} + \ldots + \frac{\varphi_k(\nu')}{\nu'}\right),$$

гдѣ v обозначаетъ произведеніе чиселъ $a_1, a_2, \ldots a_r$, изъ числа которыхъ исключено a_k, а число ν' опредѣляется равенствомъ:

$$\nu' = E\frac{t}{v}.$$

Такъ какъ при достаточно большомъ t, а именно при $t \geqq 2^r$ рядъ чиселъ

$$\frac{\log(\nu+1)}{\nu+1}, \quad \frac{\log(\nu+2)}{\nu+2}, \ldots\ldots$$

[illegible] § 21 предложение [illegible]

$$\text{Mod} \sum [illegible]$$

[illegible]

$$\text{Mod} \sum [illegible] < [illegible].$$

Отсюда заключаемъ, что модуль суммы $\sum_k$ менѣе суммы

$$[illegible] \sum \frac{1}{\nu}.$$

Изъ опредѣленія же ν непосредственно вытекаетъ, что сумма

$$\sum \frac{1}{\nu}$$

не превышаетъ суммы

$$\sum \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_{r-1}},$$

гдѣ суммированіе по $b_1, b_2, \dots b_{r-1}$ распространено на всѣ различныя цѣлыя и положительныя (0 исключается) рѣшенія неравенства

$$b_1 b_2 \dots b_{r-1} \leq \frac{t}{\nu + 1}$$

(словамъ «различныя рѣшенія» мы придаемъ тотъ же смыслъ, что и въ § 21).

Такъ какъ всѣ слагаемыя суммы

$$\sum \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_{r-1}}$$

входятъ въ выраженіе

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{t}\right)^{r-1},$$

если послѣднее будетъ раскрыто, то, слѣдовательно,

$$\sum \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_{r-1}} < (1 + \log t)^{r-1},$$

и потому и подавно

$$\text{Mod} \sum_k < \frac{\varphi(a) \, (\log t)^l \, (1 + \log t)^{r-1}}{2t^{\frac{1}{r}}}$$

и значитъ

$$\left(\lim \sum\nolimits_k\right)_{t=\infty} = 0.$$

Но

$$F(t) = P_1(\nu)\, P_2(\nu) \ldots P_r(\nu) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_r,$$

а потому

$$(\beta) \qquad (\lim F(t))_{t=\infty} = \lim\, (P_1(\nu)\, P_2(\nu) \ldots P_r(\nu))_{\nu=\infty}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда число l равно 0, въ силу опредѣленія функцій $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$, ... $\varphi_r(A)$ функція $S_1(A)$ совпадаетъ съ функціей $S(A)$,

$$(\text{Lim}\, P_k(\nu))_{\nu=\infty} = L_k, \; (\text{Lim}\, F(t))_{t=\infty} = S,$$

а потому въ этомъ случаѣ на основаніи равенства (β) будемъ имѣть

$$S = L_1\, L_2 \ldots L_r.$$

Положимъ далѣе

$$\sum f_1(a_1)\, f_2(a_2) \ldots f_r(a_r) \log a_k = \overset{(k)}{S}(A),$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ различныя разложенія числа A на r цѣлыхъ и положительныхъ множителей:

$$A = a_1\, a_2 \ldots a_r.$$

На основаніи равенства (β) получимъ слѣдующія равенства, число которыхъ равно r:

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \overset{(1)}{S}(1) + \frac{1}{2}\overset{(1)}{S}(2) + \frac{1}{3}\overset{(1)}{S}(3) + \ldots = M_1\, L_2\, L_3 \ldots L_r \\ \overset{(2)}{S}(1) + \frac{1}{2}\overset{(2)}{S}(2) + \frac{1}{3}\overset{(2)}{S}(3) + \ldots = L_1\, M_2\, L_3 \ldots L_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{(r)}{S}(1) + \frac{1}{2}\overset{(r)}{S}(2) + \frac{1}{3}\overset{(r)}{S}(3) + \ldots = L_1\, L_2 \ldots L_{r-1}\, M_r. \end{cases}$$

Замѣчая, что

$$\overset{(1)}{S}(A) + \overset{(2)}{S}(A) + \ldots + \overset{(r)}{S}(A) = \sum f_1(a_1)\, f_2(a_2) \ldots f_r(a_r) \log a_1\, a_2 \ldots a_r,$$

гдѣ суммированіе во второй части распространено на всѣ разложенія числа A на r множителей, и слѣдовательно

$$\overset{(1)}{S}(A)+\overset{(2)}{S}(A)+\ldots+\overset{(r)}{S}(A)=S(A)\log A,$$

мы, складывая почленно равенства (γ), находимъ:

$$T=M_1 L_2 L_3 \ldots L_r + L_1 M_2 L_3 L_4 \ldots L_r + \ldots + L_1 L_2 \ldots L_{r-1} M_r.$$

Отсюда заключаемъ, что функція $\Theta(t)$ (предыдущій §) можетъ быть представлена въ слѣдующей формѣ:

$$\Theta(t)=L_1 L_2 \ldots L_r (\log t + C) - M_1 L_2 L_3 \ldots L_r -$$
$$- L_1 M_2 L_3 \ldots L_r - \ldots - L_1 L_2 \ldots L_{r-1} M_r + \alpha_t.$$

Пусть въ функцію $f_m(A)$ входитъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ мнимыхъ корней уравненій (2) § 20, а въ $f_{m'}(A)$ — съ нимъ сопряженный. Тогда, если

$$L_m=0,$$

то и

$$L_{m'}=0,$$

а потому имѣли бы

$$\Theta(t)=\alpha_t.$$

Но

$$(\lim \alpha_t)_{t=\infty}=0,$$

а $\Theta(t)$ по доказанному $\geqq 1$ при всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ t. Противорѣчіе, къ которому мы пришли и показываемъ, что число L_m не равно O. Предложеніе доказано.

§ 24. Лемма. Если $m+1$ (цѣлое число m мы предполагаемъ большимъ O) есть значокъ такого произведенія (§ 20)

$$\omega_0\,\omega_1 \ldots \omega_r,$$

въ которомъ всѣ множители вещественные, то число L_m не равно O. Доказательство. Пусть

$$F(A)=\sum f_m(\delta),$$

гдѣ суммированіе по δ распространено на всѣ дѣлители цѣлаго положительнаго числа A. Введемъ еще слѣдующія обозначенія:

$$\Theta_1(n)=\frac{F(1)}{\sqrt{1}}+\frac{F(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{F(n)}{\sqrt{n}},$$

$$E\frac{n}{k} = n_k \ (k \geqq 1, \text{ но} \leqq n \text{ цѣлое число});$$

$$E\sqrt{n} = \mu, \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} = \psi(k),$$

$$P = \frac{f_m(1)\,\psi(n_1)}{\sqrt{1}} + \frac{f_m(2)\,\psi(n_2)}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{f_m(\mu)\,\psi(n_\mu)}{\sqrt{\mu}}$$

и наконецъ

$$Q = \frac{f_m(\mu+1)\,\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}} + \frac{f_m(\mu+2)\,\psi(n_{\mu+2})}{\sqrt{\mu+2}} + \ldots + \frac{f_m(n)\,\psi(n_n)}{\sqrt{n}}.$$

Изъ опредѣленія функціи $\Theta_1(n)$ и чиселъ P и Q вытекаетъ слѣдующее равенство:

$$\Theta_1(n) = P + Q.$$

Такъ какъ

$$0 < \frac{\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}} > \frac{\psi(n_{\mu+2})}{\sqrt{\mu+2}} > \frac{\psi(n_{\mu+3})}{\sqrt{\mu+3}} \ldots\ldots,$$

то на основаніи § 20, предложенія 4-го,

$$\text{Mod}\, Q < \frac{1}{2}\varphi(a)\frac{\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}};$$

но

$$\psi(k) < \int_1^k x^{-\frac{1}{2}}\,dx + 1 = 2k - 1,$$

а потому

$$\text{Mod}\, Q < \frac{1}{2}\varphi(a)\frac{2\sqrt{n_{\mu+1}} - 1}{\sqrt{\mu+1}} < \varphi(a).$$

Далѣе, предполагая, что n_t обозначаетъ одно изъ чиселъ $n_2, n_3, n_4, \ldots n_n$ и принимая во вниманіе равенство

$$\psi(n) - \psi(n_t) = \frac{1}{\sqrt{n_t+1}} + \frac{1}{\sqrt{n_t+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

и неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{n_t+1}} + \frac{1}{\sqrt{n_t+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \int_{n_t}^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n_t},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_t+1}} + \frac{1}{\sqrt{n_t+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_{n_t}^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n_t}} =$$

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n_t} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n_t}},$$

имѣемъ

$$0 < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n_t} - \psi(n) + \psi(n_t) < \frac{1}{\sqrt{n_t}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

и, слѣдовательно,

$$-2\left(\sqrt{\frac{n}{t}} - \sqrt{n_t}\right) < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n_t} - \psi(n) + \psi(n_t) - 2\left(\sqrt{\frac{n}{t}} - \sqrt{n_t}\right) < \frac{1}{\sqrt{n_t}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

или

$$-2\left(\sqrt{\frac{n}{t}} - \sqrt{n_t}\right) < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{t}} - \psi(n) + \psi(n_t) < \frac{1}{\sqrt{n_t}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Но

$$2\left(\sqrt{\frac{n}{t}} - \sqrt{n_t}\right) = 2\,\frac{\frac{n}{t} - n_t}{\sqrt{\frac{n}{t}} + \sqrt{n_t}} < \frac{1}{\sqrt{n_t}} < \sqrt{\frac{2t}{n}}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{n_t}} - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_t}} < \sqrt{\frac{2t}{n}},$$

и значитъ, абсолютное значеніе выраженія

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{t}} - \psi(n) + \psi(n_t)$$

менѣе $\sqrt{\frac{2t}{n}}$.

Если-же $t = 1$, то это выраженіе равно O. Полагая

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{t}} - \psi(n) + \psi(n_t) = \alpha_t$$

и умножая обѣ части послѣдняго равенства на $\frac{f_m(t)}{\sqrt{t}}$, суммируемъ по t въ предѣлахъ отъ 1 до μ. Имѣемъ:

$$[2\sqrt{n} - \psi(n)] \sum_{t=1}^{t=\mu} \frac{f_m(t)}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{n} \sum_{t=1}^{t=\mu} \frac{f_m(t)}{t} + \sum_{t=1}^{t=\mu} \frac{f_m(t)\,\psi(n_t)}{\sqrt{t}} = \frac{\alpha_1 f_m(1)}{\sqrt{1}} + \frac{\alpha_2 f_m(2)}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\alpha_\mu f_m(\mu)}{\sqrt{\mu}}$$

или, такъ какъ

$$\sum_{t=1}^{t=\mu} \frac{f_m(t)\,\psi(n_t)}{\sqrt{t}} = P,$$

$$(a')\qquad \left\{ \begin{aligned} & P + (2\sqrt{n} - \psi(n)) \sum_{t=1}^{t=\mu} \frac{f_m(t)}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{n} \sum_{t=1}^{t=\mu} \frac{f_m(t)}{t} = \\ & \qquad \frac{\alpha_1 f_m(1)}{\sqrt{1}} + \frac{\alpha_2 f_m(2)}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\alpha_\mu f_m(\mu)}{\sqrt{\mu}}. \end{aligned} \right.$$

Каково бы ни было цѣлое положительное число μ' большее μ на основаніи § 20, предложенія 4-го, имѣемъ:

$$\text{Mod}\left[\frac{f_m(\mu+1)}{\mu+1}+\frac{f_m(\mu+2)}{\mu+2}+\ldots+\frac{f_m(\mu')}{\mu'}\right]\leqq\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(a)}{\mu+1},$$

а потому и подавно

$$\text{Mod}\left[\frac{f_m(\mu+1)}{\mu+1}+\frac{f_m(\mu+2)}{\mu+2}+\ldots+\frac{f_m(\mu')}{\mu'}\right]<\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(a)}{\sqrt{n}},$$

слѣдовательно

$$\sum_{t=1}^{t=\mu}\frac{f_m(t)}{t}=L_m+\beta,$$

гдѣ

$$\text{Mod}\,\beta<\frac{\varphi(a)}{2\sqrt{n}}.$$

Далѣе на основаніи того же § 20, предложенія 4,

$$\text{Mod}\sum_{t=1}^{t=\mu}\frac{f_m(t)}{\sqrt{t}}\leqq\frac{1}{2}\,\varphi(a),$$

принимая же во вниманіе, что

$$\text{Mod}\,\alpha_t<\sqrt{\frac{2t}{n}}$$

и

$$\text{Mod}\left[\frac{\alpha_1 f_m(1)}{\sqrt{1}}+\frac{\alpha_2 f_m(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\alpha_\mu f_m(\mu)}{\sqrt{\mu}}\right]\leqq$$

$$\text{Mod}\,\frac{\alpha_1 f_m(1)}{\sqrt{1}}+\text{Mod}\,\frac{\alpha_2 f_m(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\text{Mod}\,\frac{\alpha_\mu f_m(\mu)}{\sqrt{\mu}}$$

находимъ:

$$\text{Mod}\left[\frac{\alpha_1 f_m(1)}{\sqrt{1}}+\frac{\alpha_2 f_m(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\alpha_\mu f_m(\mu)}{\sqrt{\mu}}\right]<\frac{\mu\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\leqq\sqrt{2}.$$

Слѣдовательно, можемъ положить

$$\sum_{t=1}^{t=\mu}\frac{f_m(t)}{\sqrt{t}}=\beta',$$

$$\frac{\alpha_1 f_m(1)}{\sqrt{1}}+\frac{\alpha_2 f_m(2)}{\sqrt{2}}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_\mu f_m(\mu)}{\sqrt{\mu}}=\beta'',$$

гдѣ

$$\text{Mod}\,\beta'\leqq\frac{1}{2}\varphi(a)\quad\text{и}\quad\text{Mod}\,\beta''<\sqrt{2}.$$

Наконецъ

$$2\sqrt{n}-\psi(n)>2\sqrt{n}-(2\sqrt{n}-1)=1$$

и

$$2\sqrt{n}-\psi(n)<2\sqrt{n}-\int_1^n x^{-\frac{1}{2}}dx=2,$$

а потому,

$$2\sqrt{n}-\psi(n)=\beta''',$$

гдѣ $\beta'''>1$, но <2. Полученные результаты даютъ намъ возможность равенство (a') представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$P-2\sqrt{n}\ (L_m+\beta)+\beta'''\beta'=\beta''.$$

Отсюда имѣемъ

$$P=2\ L_m\sqrt{n}+\alpha,$$

гдѣ

$$\text{Mod}\ \alpha\leqq 2\ \sqrt{n}\ \text{Mod}\ \beta+\text{Mod}\ \beta''+\text{Mod}\ \beta'\ \beta'''<\varphi(a)+\sqrt{2}+\varphi(a),$$

а такъ какъ

$$\Theta_1(n)=P+Q$$

и Mod. Q по доказанному выше менѣе $\varphi(a)$, то

(a'')
$$\Theta_1(n)=2\ L_m\sqrt{n}+\gamma,$$

гдѣ

$$\text{Mod}\ \gamma<3\ \varphi(a)+\sqrt{2}.$$

Докажемъ теперь, что при достаточно большомъ n значеніе функціи $\Theta_1(n)$ можетъ превзойти любое положительное число A', какъ бы оно велико ни было. Тогда очевидно изъ уравненія (a'') будетъ слѣдовать, что число L_m не равно O. Дѣйствительно, пусть q обозначаетъ любое простое число и λ цѣлое положительное число (не 0). Изъ опредѣленія функціи $F(A)$ слѣдуетъ, что

$$F(q^\lambda)=f_m(1)+f_m(q)+f_m(q^2)+\ldots+f_m(q^\lambda)=$$
$$f_m(1)+f_m(q)+[f_m(q)]^2+\ldots[f_m(q)]^\lambda$$

и такъ какъ

$$f_m(q)=0,$$

если число a дѣлится на q и

$$f_m(q)=1\quad\text{или}\quad-1,$$

если a на q не дѣлится, то

$$F(q^\lambda)=1$$

если a дѣлится на q и

$$F(q^\lambda) = \lambda + 1,$$

если

$$f_m(q) = 1$$

и наконецъ

$$F(q^\lambda) = \frac{1 + (-1)^\lambda}{2},$$

если

$$f_m(q) = -1.$$

Такимъ образомъ во всѣхъ трехъ случаяхъ

$$F(q^\lambda) \geqq 0.$$

Замѣчая же, что при взаимно простыхъ числахъ m и m' всѣ дѣлители числа mm' заключаются въ формѣ $\delta\delta'$, гдѣ δ любой дѣлитель числа m и δ' — числа m', имѣемъ:

$$F(m)\,F(m') = F(mm');$$

и слѣдовательно, каково бы ни было цѣлое положительное число A (не 0)

$$F(A) \geqq 0,$$

а если A полный квадратъ, то

$$F(A) \geqq 1.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующему неравенству

$$\Theta_1(n) \geqq \frac{F(1)}{1} + \frac{F(2^2)}{2} + \frac{F(3^2)}{3} + \ldots + \frac{F(\mu^2)}{\mu}$$

и значитъ

$$\Theta_1(n) \geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\mu}.$$

Такъ какъ число μ возрастаетъ безпредѣльно одновременно съ n, то послѣднее неравенство и показываетъ, что при достаточно большомъ значенiи n значенiе функцiи $\Theta_1(n)$ можетъ превзойти любое положительное число A', какъ бы послѣднее велико ни было. Предложенiе доказано.

§ 25. Лемма. Если цѣлое число $m > 0$ и

$$\Phi_m(t) = \sum \left(\frac{f_m(p)}{p} + \frac{f_m(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_m(p^\lambda)}{p^\lambda} \right) \log p,$$

гдѣ суммированiе распространено на всѣ простыя числа p, не превышающiя заданнаго положительнаго числа t и показатель λ удовлетворяетъ условiямъ

$$p^\lambda \leqq t < p^{\lambda+1},$$

то

$$\operatorname{Mod} \Phi_m(t) < \frac{\frac{1}{2}\log 2 + \varphi(a)\left(\frac{\log 3}{6}+1\right)}{\operatorname{Mod} L_m}.$$

Доказательство. Обратимся къ формулѣ (2) **Чебышева**, выведенной нами въ § 1 первой главы и положимъ, что функція $f(x)$ для всѣхъ цѣлыхъ значеній x, удовлетворяющихъ условіямъ

$$1 \leqq x \leqq t$$

опредѣляется равенствомъ

$$f(x) = \frac{f_m(x)}{x},$$

а для всѣхъ цѣлыхъ значеній x большихъ t значеніе $f(x)$ равно 0. Тогда функція $F(p)$ опредѣлится слѣдующимъ равенствомъ:

$$F(p) = \frac{f_m(p)}{p}\sum_{n=1}^{n=E\frac{t}{p}} \frac{f_m(n)}{n} + \frac{f_m(p^2)}{p^2}\sum_{n=1}^{n=E\frac{t}{p^2}} \frac{f_m(n)}{n} + \ldots\ldots + \frac{f_m(p^\lambda)}{p^\lambda}\sum_{n=1}^{n=\frac{t}{p^\lambda}} \frac{f_m(n)}{n},$$

гдѣ цѣлое число λ опредѣляется изъ условій

$$p^\lambda \leqq t < p^{\lambda+1}.$$

Введя слѣдующее обозначеніе:

$$L_m(z) = \frac{f_m(1)}{1} + \frac{f_m(2)}{2} + \ldots + \frac{f_m(Ez)}{Ez},$$

мы можемъ функцію $F(p)$ представить въ такомъ видѣ:

$$F(p) = L_m\left(\frac{t}{p}\right)\frac{f_m(p)}{p} + L_m\left(\frac{t}{p^2}\right)\frac{f_m(p^2)}{p^2} + \ldots + L_m\left(\frac{t}{p^\lambda}\right)\frac{f_m(p^\lambda)}{p^\lambda}$$

и на основаніи формулы (2) **Чебышева**, если обозначимъ сумму

$$\frac{f_m(2)\log 2}{2} + \frac{f_m(3)\log 3}{3} + \ldots\ldots + \frac{f_m(t)\log t}{t}$$

черезъ $M_m(t)$ и будемъ имѣть такое равенство:

$$M_m(t) = \sum L_m\left(\frac{t}{p}\right)\frac{f_m(p)}{p}\log p + \sum L_m\left(\frac{t}{p^2}\right)\frac{f_m(p^2)}{p^2}\log p + \ldots\ldots,$$

гдѣ въ первой суммѣ суммированіе по p распространено на всѣ простыя числа, не превышающія t, во второй — на всѣ тѣ простыя числа, которыхъ квадраты не превышаютъ t и т. д. Полагая

$$\frac{f_m(k)}{k}\left(L_m - L_m\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \Delta(k)$$

($k \geqq 1$ цѣлое число), имѣемъ слѣдующее равенство:

$$L_m \Phi_m(t) - M_m(t) = \sum (\Delta(p) + \Delta(p^2) + \ldots + \Delta(p^\lambda)) \log p.$$

Но на основаніи § 20, предложенія 4-го,

$$\text{Mod}\left(L_m - L_m\left(\frac{t}{k}\right)\right) \leqq \frac{1}{2}\varphi(a)\frac{1}{1+E\frac{t}{k}} < \frac{1}{2}\varphi(a)\frac{k}{t}$$

и значитъ

$$\text{Mod}\,\Delta(k) < \frac{\varphi(a)}{2t},$$

а потому

$$\text{Mod}\left[L_m \Phi_m(t) - M_m(t)\right] < \frac{\varphi(a)}{2t}\sum \lambda \log p,$$

гдѣ суммированіе въ правой части распространено на всѣ простыя числа, не превышающія t и цѣлое число λ для всякаго простого числа p опредѣляется изъ условій

$$p^\lambda \leqq t < p^{\lambda+1}.$$

Такъ какъ нами было доказано во второй главѣ, что

$$\sum \lambda \log p < 2t,$$

то, слѣдовательно,

$$L_m \Phi_m(t) - M_m(t) = \alpha,$$

гдѣ

$$\text{Mod}\,\alpha < \varphi(a).$$

Отсюда для функціи $\Phi_m(t)$ получаемъ такое выраженіе:

$$\Phi_m(t) = \frac{M_m(t) + \alpha}{L_m},$$

и значитъ

$$\text{Mod}\,\Phi_m(t) \leqq \frac{\text{Mod}\,M_m(t) + \text{Mod}\,\alpha}{\text{Mod}\,L_m}.$$

Но на основаніи § 20, предложенія 4-го

$$\text{Mod}\left[\frac{f_m(3)}{3}\log 3 + \frac{f_m(4)}{4}\log 4 + \ldots + \frac{f_m(t)}{t}\log t\right] \leqq \frac{\varphi(a)\log 3}{6},$$

то, слѣдовательно,

$$\text{Mod}\,M_m(t) = \text{Mod}\left[\frac{f_m(2)\log 2}{2} + \frac{f_m(3)\log 3}{3} + \ldots + \frac{f_m(t)\log t}{t}\right] \leqq \frac{\log 2}{2} + \frac{\varphi(a)\log 3}{3},$$

а потому

$$\text{Mod}\,\Phi_m(t) < \frac{\frac{\log 2}{2} + \left(1 + \frac{\log 3}{6}\right)\varphi(a)}{\text{Mod}\,L_m}$$

Лемма доказана.

§ 26. Теорема Дирихле объ ариѳметической прогрессіи.

Доказательство. Пусть b' обозначаетъ одно изъ чиселъ, удовлетворяющихъ сравненію

$$bb' \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ a)$$

и t — любое число большее a.

Далѣе пусть $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, ... $\Phi_r(t)$ будутъ функціи, опредѣляемыя въ предыдущемъ §, а

$$\omega(t) = \sum \left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\lambda}\right)$$

та функція, которую мы разсматривали въ § 17 (Глава II). Функцію $\omega(t)$ мы можемъ представить въ слѣдующей формѣ:

$$\omega(t) = \sum \left(\frac{f_0(p)}{p} + \frac{f_0(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_0(p^\lambda)}{p^\lambda}\right) \log p +$$

$$+ \sum \left(\frac{\log q}{q} + \frac{\log q}{q^2} + \ldots + \frac{\log q}{q^\lambda}\right);$$

суммированіе въ первой суммѣ распространено на всѣ тѣ простыя числа p, не превышающія t, на которыя a не дѣлится, а во второй — на всѣ тѣ простыя числа q, на которыя a дѣлится. Имѣемъ слѣдующія равенства:

$$f_0(b')\,\omega(t) = f_0(b') \sum \left(\frac{f_0(p)}{p} + \frac{f_0(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_0(p^\lambda)}{p^\lambda}\right) \log p$$

$$+ f_0(b') \sum \left(\frac{\log q}{q} + \frac{\log q}{q^2} + \ldots + \frac{\log q}{q^\lambda}\right)$$

$$f_1(b')\,\Phi_1(t) = f_1(b') \sum \left(\frac{f_1(p)}{p} + \frac{f_1(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_1(p^\lambda)}{p^\lambda}\right) \log p$$

$$f_2(b')\,\Phi_2(t) = f_2(b') \sum \left(\frac{f_2(p)}{p} + \frac{f_2(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_2(p^\lambda)}{p^\lambda}\right) \log p$$

. . . .

. . . .

$$f_r(b')\,\Phi_r(t) = f_r(b') \sum \left(\frac{f_r(p)}{p} + \frac{f_r(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_r(p^\lambda)}{p^\lambda}\right) \log p.$$

Складывая ихъ почленно и принимая во вниманіе пятое предложеніе § 20, выводимъ такое равенство:

$$f_0(b')\,\omega(t) + f_1(b')\,\Phi_1(t) + \ldots + f_r(b')\,\Phi_r(t) =$$

$$\sum \left(\frac{\log q}{q} + \frac{\log q}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{\log q}{q^\lambda}\right) + \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p} + \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^2} +$$

$$+ \ldots\ldots + \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^\lambda},$$

гдѣ во второй части суммированіе по q въ первой суммѣ распространено на всѣ простыя числа, входящія въ разложеніе числа a на множители, во второй — на всѣ простыя числа p, не превышающія t и удовлетворяющія сравненію

$$pb' \equiv 1 \text{ (Mod } a),$$

т. е. на всѣ простыя числа формы

$$ax + b,$$

въ третьей — на всѣ простыя числа p, квадраты которыхъ заключаются въ этой же формѣ и не превышають t и т. д. Изъ полученнаго равенства выводимъ слѣдующее:

$$\varphi(a) \sum \frac{\log p}{p} - \log t = \omega(t) - \log t + f_1(b')\, \Phi_1(t) + f_2(b')\, \Phi_2(t) + \ldots + f_r(b')\, \Phi_r(t) - \sum \left(\frac{\log q}{q} + \frac{\log q}{q^2} + \ldots + \frac{\log q}{q^\lambda}\right) - \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^2} - \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^3} - \ldots - \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^\lambda}.$$

Но (§ 17)

$$\text{Mod } [\omega(t) - \log t] < 1$$

и на основаніи предыдущаго §

$$\text{Mod } \Phi_m(t) < A_m,$$

гдѣ

$$A_m = \frac{\frac{1}{2} \log 2 + \left(1 + \frac{\log 3}{6}\right) \varphi(a)}{\text{Mod } L_m},$$

слѣдовательно,

$$\text{Mod } \left[\varphi(a) \sum \frac{\log p}{p} - \log t\right] < 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_r + \sum \left(\frac{\log q}{q} + \frac{\log q}{q^2} + \ldots + \frac{\log q}{q^\lambda}\right) + \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^2} + \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^3} + \ldots + \varphi(a) \sum \frac{\log p}{p^\lambda},$$

а потому и подавно положивъ

$$A = \frac{1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_r + \sum \frac{\log q}{q}}{\varphi(a)} + \sum \frac{\log p'}{p'(p'-1)},$$

гдѣ суммированіе по p' распространено на всѣ простыя числа до 2 до ∞,

$$\text{Mod } \left[\sum \frac{\log p}{p} - \frac{\log t}{\varphi(a)}\right] < A.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\sum \frac{\log p}{p} = \frac{\log t}{\varphi(a)} + A\vartheta,$$

гдѣ ϑ обозначаетъ число, абсолютное значеніе котораго не превосходитъ 1. Такъ какъ суммированіе по p въ лѣвой части послѣдняго равенства распространено исключительно на всѣ простыя числа, не превышающія t и заключающіяся въ формѣ

$$ax + b,$$

а абсолютное значеніе числа $A\vartheta$ не превосходитъ конечнаго числа A, отъ t независящаго, то, слѣдовательно, теорема Дирихле объ ариѳметической прогрессіи доказана. Пусть далѣе

$$1 + Ee^{2A\,\varphi(a)} = B,$$

(e основаніе Нэперовыхъ логариѳмовъ) и пусть N обозначаетъ любое, большее 2, число. Тогда въ рядѣ

$$N+1, \quad N+2, \ldots . BN-1, \quad BN$$

найдется по крайней мѣрѣ одно простое число формы

$$ax + b.$$

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\sum_{N+1}^{BN} \frac{\log p}{p} = \sum_{2}^{BN} \frac{\log p}{p} - \sum_{2}^{N} \frac{\log p}{p}$$

(суммированія въ указанныхъ предѣлахъ распространены исключительно на простыя числа формы $ax+b$).

Но

$$\sum_{2}^{BN} \frac{\log p}{p} - \sum_{2}^{N} \frac{\log p}{p} = \frac{\log BN}{\varphi(a)} + A\vartheta_1 - \frac{\log N}{\varphi(a)} - A\vartheta_2,$$

гдѣ

$$-1 < \vartheta_1 < 1, \quad -1 < \vartheta_2 < 1,$$

а потому

$$\sum_{N+1}^{BN} \frac{\log p}{p} = \frac{\log B}{\varphi(a)} + A\vartheta_3,$$

гдѣ

$$-2 < \vartheta_3 < 2.$$

Такъ какъ

$$\frac{\log B}{\varphi(a)} > 2A$$

то, слѣдовательно,

$$\sum_{N+1}^{BN} \frac{\log p}{p} > 0$$

и значитъ между

$$N+1 \quad \text{и} \quad BN$$

(включая и предѣлы) имѣется по крайней мѣрѣ одно простое число формы

$$ax+b.$$

§ 27. Полученные въ предыдущихъ §§ результаты даютъ намъ возможность сдѣлать нѣкоторыя заключенія и о суммѣ

$$\sum_{2}^{t} \frac{1}{p},$$

гдѣ суммированіе въ указанныхъ предѣлахъ распространено на всѣ простыя числа формы

$$ax+b.$$

Полагая въ § 25 ($m>0$)

$$M_m(t) = \frac{f_m(2)}{2}\log 2 + \frac{f_m(3)}{3}\log 3 + \ldots + \frac{f_m(t)}{t}\log t$$

мы получили слѣдующее равенство:

$$M_m(t) = \sum L_m\left(\frac{t}{p}\right)\frac{f_m(p)}{p}\log p + \sum L_m\left(\frac{t}{p^2}\right)\frac{f_m(p^2)}{p^2}\log p + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \sum L_m\left(\frac{t}{p^\lambda}\right)\frac{f_m(p^\lambda)}{p^\lambda}\log p,$$

гдѣ p обозначаетъ любое простое число, не превышающее t и число λ опредѣляется изъ условій: $p^\lambda \leqq t \leqq p^{\lambda+1}$. Замѣчая, что (§ 20, 4 предложеніе).

$$\operatorname{Mod} L_m\left(\frac{t}{p^2}\right) f_m(p^2) = \operatorname{Mod} f_m(p^2) \operatorname{Mod} L_m\left(\frac{t}{p^2}\right) \leqq \frac{1}{2}\varphi(a)$$

$$\operatorname{Mod} L_m\left(\frac{t}{p^3}\right) f_m(p^3) = \operatorname{Mod} f_m(p^3) \operatorname{Mod} L_m\left(\frac{t}{p^3}\right) \leqq \frac{1}{2}\varphi(a)$$

. . . .

$$\operatorname{Mod} L_m\left(\frac{t}{p^\lambda}\right) f_m(p^\lambda) = \operatorname{Mod} f_m(p^\lambda) \operatorname{Mod} L_m\left(\frac{t}{p^\lambda}\right) < \frac{1}{2}\varphi(a)$$

и полагая

$$L_m\left(\frac{t}{p}\right)=L_m+\alpha_p,$$

гдѣ въ силу того-же 4 предложенія § 20

$$\text{Mod}\ \alpha_p \leqq \frac{1}{2}\varphi(a)\frac{p}{t},$$

находимъ, что

$$\text{Mod}\ L_m\sum\frac{f_m(p)}{p}\log p,$$

равный

$$\text{Mod}\left[M_m(t)-\sum\frac{\alpha_p f_m(p)}{p}\log p-\sum L_m\left(\frac{t}{p^2}\right)\frac{f_m(p^2)}{p^2}\log p-\ldots-\right.$$
$$\left.-\ldots-\sum L_m\left(\frac{t}{p^\lambda}\right)\frac{f_m(p^\lambda)}{p^\lambda}\log p\right],$$

будетъ менѣе

$$\text{Mod}\ M_m(t)+\frac{\varphi(a)}{2t}\sum\log p+\frac{\varphi(a)}{2}\sum\frac{\log p}{p^2}+\frac{\varphi(a)}{2}\sum\frac{\log p}{p^3}+\ldots+\frac{\varphi(a)}{2}\sum\frac{\log p}{p^\lambda}.$$

Но сумма

$$\sum\frac{\log p}{p^2}+\sum\frac{\log p}{p^3}+\ldots+\sum\frac{\log p}{p^\lambda}$$

менѣе суммы

$$\sum\frac{\log p'}{p'(p'-1)},$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ простыя числа отъ 2 до ∞, и на основаніи главы 2-й

$$\sum\log p<2t,$$

слѣдовательно, подавно имѣемъ такое неравенство

$$\text{Mod}\ L_m\sum\frac{f_m(p)}{p}\log p<\text{Mod}\ M_m(t)+\varphi(a)+\frac{\varphi(a)}{2}\sum\frac{\log p'}{p'(p'-1)}.$$

А такъ какъ

$$\text{Lim}\,[\text{Mod}\ M_m(t)]_{t=\infty}=M_m,$$

то, слѣдовательно, ни при какомъ сколь угодно большомъ положительномъ значеніи t модуль суммы

$$\sum\frac{f_m(p)}{p}\log p$$

не будетъ превышать нѣкотораго конечнаго числа B_m. Обозначимъ сумму

$$\sum\frac{f_m(p)}{p}\log p$$

черезъ $\psi_m(t)$, Принимая во вниманіе, что

$$\frac{\psi_m(k)-\psi_m(k-1)}{\log k}=\frac{f_m(k)}{k},$$

если k простое число и

$$\frac{\psi(k)-\psi(k-1)}{\log k}=0,$$

если k цѣлое составное число и обозначая черезъ t' любое число большее t, приходимъ къ равенству

$$\sum_{t+1}^{t'}\frac{f_m(p)}{p}=\sum_{k=t+1}^{k=t'}\frac{\psi_m(k)-\psi_m(k-1)}{\log k}$$

(въ лѣвой части въ указанныхъ предѣлахъ суммированіе распространено на всѣ простыя числа, а въ правой—на всѣ цѣлыя числа). Отсюда имѣемъ:

$$\sum_{t+1}^{t'}\frac{f_m(p)}{p}=-\frac{\psi_m(t)}{\log(t+1)}+\frac{\psi_m(t')}{\log(t'+1)}+\sum_{k=t+1}^{k=t'}\left(\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right)\psi_m(n)$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname{Mod}\sum_{t+1}^{t'}\frac{f_m(p)}{p}<\frac{B_m}{\log(t+1)}+\frac{B_m}{\log(t'+1)}+B_m\left(\frac{1}{\log(t+1)}-\frac{1}{\log(t'+1)}\right)$$

или, упрощая,

$$\operatorname{Mod}\sum_{t+1}^{t'}\frac{f_m(p)}{p}<\frac{2B_m}{\log(t+1)}.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что рядъ

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{f_m(p)}{p}$$

сходящійся. Предположимъ теперь, что t обозначаетъ число, превосходящее наибольшее простое число, входящее въ разложеніе числа a на множители, и пусть

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_k}=\sigma,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_k$ всѣ тѣ и только тѣ простыя числа, которыя входятъ въ разложеніе числа a. На основаніи § 17 2-й главы и сходимости всѣхъ рядовъ $(m>0)$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{f_m(p)}{p}$$

имѣемъ:

$$\sum_2^t \frac{f_0(p)}{p} = \log\log t + P - \sigma$$

$$\sum_2^t \frac{f_1(p)}{p} = \sum_2^\infty \frac{f_1(p)}{p} + \alpha_1$$

$$\sum_2^t \frac{f_2(p)}{p} = \sum_2^\infty \frac{f_2(p)}{p} + \alpha_2$$

. . . .

$$\sum_2^t \frac{f_r(p)}{p} = \sum_2^\infty \frac{f_r(p)}{p} + \alpha_r,$$

гдѣ P обозначаетъ число, остающееся конечнымъ, какъ бы велико ни было t, а модули чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ при безпредѣльномъ возрастаніи t стремятся къ 0. Сохраняя за b' то значеніе, которое оно имѣло въ предыдущемъ §, умножимъ обѣ части перваго изъ этихъ равенствъ на $f_0(b')$, второго — на $f_1'(b)$, третьяго — на $f_2(b')$ и т. д. и результаты сложимъ; получимъ слѣдующее равенство:

$$\varphi(a) \sum_2^t \frac{1}{p} = \log\log t + P - \sigma + P_1$$

— суммированіе въ лѣвой части распространено исключительно на простыя числа формы

$$ax + b$$

и

$$P_1 = f_1(b') \sum_2^\infty \frac{f_1(p)}{p} + f_2(b') \sum_2^\infty \frac{f_2(p)}{p} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + f_r(b') \sum_2^\infty \frac{f_r(p)}{p} + \alpha_1 f_1(b') + \alpha_2 f_2(b') + \ldots + \alpha_r f_r(b').$$

Слѣдовательно

$$\sum_2^t \frac{1}{p} = \frac{\log\log t}{\varphi(a)} + C',$$

гдѣ C' обозначаетъ число, не превосходящее нѣкотораго конечнаго предѣла, какъ бы велико t ни было.

§ 28. Изъ теоремы Дирихле объ ариѳметической прогрессіи, какъ весьма простое слѣдствіе вытекаетъ слѣдующее предложеніе: если число

a взаимно простое съ b и c и число c взаимно простое съ d, то въ ариөметической прогрессіи

$$a, \quad a+b, \quad 2a+b, \quad 3a+b,$$

заключается безчисленное множество такихъ чиселъ, всѣ простые дѣлители которыхъ будутъ имѣть форму

$$ct+d.$$

Дѣйствительно, обозначая черезъ a' одно изъ рѣшеній сравненія

$$ax+b \equiv d \text{ (Mod } c),$$

найдемъ, что всѣ числа

$$a(a'+cy)+b = acy + aa' + b,$$

гдѣ y обозначаетъ любое цѣлое число, заключаются въ формѣ

$$ct+d;$$

но числа

$$ac \quad \text{и} \quad aa'+b,$$

въ силу нашихъ условій взаимно простыя, а потому въ линейной формѣ

$$acy + aa' + b$$

заключается безчисленное множество простыхъ чиселъ. Предложеніе доказано. Въ двухъ частныхъ случаяхъ, а именно: 1) $c=4$ и $d=1$ и 2) $c=b$ и $d=1$, это предложеніе намъ удалось доказать и независимо отъ теоремы Дирихле. Въ основаніи нашего доказательства лежитъ слѣдующая теорема, принадлежащая Лагранжу: если каждое изъ чиселъ A, B, C, H, и

$$B^2 - AC$$

взаимно простое съ нечетнымъ положительнымъ числомъ a, то сравненіе

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv H \text{ (Mod } a)$$

допускаетъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ.

Докажемъ это предложеніе (наше доказательство отличается отъ доказательства, даннаго Лагранжомъ). Разсмотримъ сперва частный случай: число

$$a = p,$$

гдѣ p простое число, большее 2. Умножаемъ обѣ части сравненія

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 \equiv H \pmod p$$

на A и представляемъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$(Ax + By)^2 - (B^2 - AC)\,y^2 \equiv AH \pmod p.$$

Если число AH квадратичный вычетъ числа p, то положивъ y равнымъ 0, мы x опредѣлимъ изъ сравненія

$$Ax^2 \equiv H \pmod p.$$

Такимъ образомъ существованіе рѣшеній даннаго сравненія въ этомъ случаѣ легко доказывается. Предположимъ теперь, что число AH неквадратичный вычетъ p. При этомъ условіи ни одно изъ чиселъ

$$1^2 - AH, \quad 2^2 - AH, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - AH$$

не можетъ дѣлиться на p. Докажемъ, что между ними есть какъ квадратичные, такъ и неквадратичные, вычеты простого числа p. Такъ какъ эти числа по мод. p не сравнимы между собою, то допустивъ, что они всѣ будутъ неквадратичными вычетами числа p, мы при сложеніи всѣхъ этихъ чиселъ должны получить въ суммѣ число, дѣлящееся на p, но эта сумма, равная

$$\frac{(p^2-1)\,p}{24} - \frac{p-1}{2}\,AH$$

на p не дѣлится.

Къ такому же противорѣчію пришли бы, допустивъ, что всѣ составленныя выше числа будутъ квадратичными вычетами числа p. Если число

$$B^2 - AC$$

(оно по условію на p не дѣлится) квадратичный вычетъ числа p, то изъ числа чиселъ

$$1^2 - AH, \quad 2^2 - AH, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - AH$$

беремъ одно изъ тѣхъ, которыя квадратичные вычеты p. Пусть это число будетъ

$$m^2 - AH.$$

Сравненіе

$$(B^2 - AC)\,y^2 \equiv m^2 - AH \pmod p$$

въ этомъ случаѣ имѣетъ рѣшенія. Пусть

$$y = y_1$$

будетъ одно изъ рѣшеній этого сравненія. Если мы обозначимъ черезъ x_1 число, удовлетворяющее сравненію

$$Ax_1 + By_1 \equiv m \pmod p,$$

то числа x_1, y_1 будутъ удовлетворять и данному сравненію

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 \equiv H \pmod p.$$

Если же число

$$B^2 - AC$$

неквадратичный вычетъ числа p, то изъ числа чиселъ

$$1^2 - AH, \quad 2^2 - AH, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - AH$$

беремъ одно изъ тѣхъ, которыя неквадратичные вычеты числа p. Пусть такимъ числомъ будетъ

$$m'^2 - AH.$$

Опредѣляемъ y изъ сравненія

$$(B^2 - AH)\, y^2 \equiv m'^2 - AH \pmod p$$

и число x изъ сравненія

$$Ax + By \equiv m' \pmod p.$$

Числа x_1, y_1, полученныя отсюда, и будутъ рѣшеніями сравненія

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 \equiv H \pmod p.$$

Итакъ случай, когда a простое число нами разсмотрѣнъ. Пусть теперь

$$a = p^2,$$

гдѣ p простое число. Предполагая, что числа

$$x = x_1, \quad y = y_1$$

удовлетворяютъ сравненію

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 \equiv H \pmod p$$

и что число

$$Ax_1 + By_1$$

на p не дѣлится (существованіе такихъ чиселъ x_1, y_1 нами доказано) положимъ

$$x = x_1 + \lambda p \quad y = y_1$$

Опредѣливъ число λ изъ сравненія

$$\frac{Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2}{p} + 2(Ax_1 + By_1)\lambda \equiv 0 \ (\text{Mod}\ p),$$

найдемъ, что числа

$$x = x_1 + \lambda p, \quad y = y_1$$

удовлетворяютъ сравненію

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv H \ (\text{Mod}\ p^2).$$

Отъ этого сравненія перейдемъ къ сравненію

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv H \ (\text{Mod}\ p^3)$$

и т. д. и такимъ образомъ убѣдимся въ справедливости предложенія и для случая

$$a = p^k,$$

гдѣ k произвольное цѣлое положительное число. Но если наше предложеніе доказано для случая

$$a = p^k,$$

то обобщеніе его на случай

$$a = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k},$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_k$ простыя числа, большія 2, ни какихъ затрудненій не представляетъ. Возьмемъ сравненіе

$$x^2 + y^2 \equiv b \ (\text{Mod}\ a),$$

гдѣ a и b числа взаимно простыя и a число нечетное. Такъ какъ всѣ условія доказанной теоремы выполнены, то это сравненіе допускаетъ рѣшенія.

Пусть

$$x = x_1, \quad y = y_1$$

будетъ одно изъ рѣшеній этого сравненія. Число x_1 можно предположить четнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ его можно замѣнить числомъ

$$x_1 + a.$$

Число же y_1 можно предположить нечетнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ его можно замѣнить числомъ

$$y_1 + a.$$

Далѣе, обозначимъ черезъ a' любое цѣлое число взаимно простое съ y_1.

По крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ x_1, y_1, какъ мы выше видѣли, можно всегда предположить числомъ взаимно простымъ съ a. Пусть это число будетъ y_1. Тогда, опредѣляя число λ изъ сравненія

$$x_1 + 2\lambda a \equiv a' \pmod{y_1},$$

найдемъ, что числа

$$x = x_1 + 2\lambda a \text{ (число четное)}$$

$$y = y_1 \text{ (число нечетное)}$$

будутъ числа взаимно простыя. При такихъ значеніяхъ x и y всѣ дѣлители числа

$$x^2 + y^2$$

будутъ имѣть форму

$$4m + 1,$$

а такъ какъ эти числа x и y удовлетворяютъ сравненію

$$x^2 + y^2 \equiv b \pmod{a},$$

то, слѣдовательно,

$$x^2 + y^2 = at + b$$

и значитъ для случая $c = 4$, $d = 1$ предложеніе доказано

Второй частный случай, когда $c = 6$, $d = 1$, разсматривается аналогично съ предыдущимъ. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ взять сравненіе

$$x^2 + 3y^2 \equiv b \pmod{a},$$

гдѣ модуль a на 3 не дѣлится и число b взаимно простое съ a. Пусть

$$x = x_1, \quad y = y_1$$

будетъ одно изъ рѣшеній этого сравненія. Совершенно такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, убѣдимся что одно изъ чиселъ, напр. x_1 можно предположить четнымъ, а y_1 — нечетнымъ. Кромѣ того можно предположить, что числа x_1 и y_1 на 3 не дѣлятся, такъ какъ въ противномъ случаѣ они могутъ быть замѣнены числами

$$x_1 + 2a, \quad y_1 + 2a.$$

Предполагая, что число y_1 взаимно простое съ модулемъ a и обозначая черезъ b' число взаимно простое съ y_1, опредѣляемъ число λ изъ сравненія

$$x_1 + 6a\lambda \equiv b' \pmod{y_1}.$$

Числа

$$x = x_1 + 6a\lambda \text{ (четное)}$$

$$y = y_1 \text{ (нечетное)}$$

на 3 не дѣлятся и взаимно-простыя между собою; слѣдовательно, всѣ дѣлители числа

$$x^2 + 3y^2$$

будутъ имѣть форму

$$6m + 1,$$

а такъ какъ

$$x^2 + 3y^2 \equiv b \pmod{a},$$

то

$$x^2 + 3y^2 = at + b,$$

и значитъ предложеніе нами доказано и для второго частнаго случая.

§ 29. Линейная функція

$$ax + b,$$

гдѣ a и b цѣлыя взаимно простыя числа, является до сихъ поръ единственной функціей одного перемѣннаго, относительно которой доказано, что если x будетъ принимать цѣлыя значенія, то въ числѣ значеній этой функціи будетъ безчисленное множество простыхъ чиселъ. Что цѣлый полиномъ

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots A_m$ цѣлыя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 1, не можетъ давать при цѣлыхъ значеніяхъ x исключительно простыя числа, то это, какъ показалъ Лежандръ, доказать не трудно. Дѣйствительно, если при x равномъ a имѣемъ

$$f(a) = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_m = p,$$

гдѣ p простое число, то положивъ

$$x = a + \lambda p,$$

найдемъ

$$f(a + \lambda p) = p + p\,\varphi(\lambda),$$

гдѣ $\varphi(\lambda)$ обозначаетъ цѣлый полиномъ съ цѣлыми коеффиціентами. Отсюда слѣдуетъ, что, давая λ различныя цѣлыя значенія, мы можемъ получить сколь угодно чиселъ

$$f(a + \lambda p),$$

которыя будутъ по числовому значенію больше p и будутъ дѣлиться на p.

Очевидно также, что цѣлый полиномъ

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots A_m$ цѣлыя числа, наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 1, не можетъ давать при цѣлыхъ значеніяхъ x и безчисленнаго множества простыхъ чиселъ, если онъ есть приводимая функція въ области цѣлыхъ чиселъ. Можно однако привести примѣры и такихъ цѣлыхъ функцій, которыя не приводимы въ области цѣлыхъ чиселъ, и которыя также не могутъ давать безчисленнаго множества простыхъ чиселъ. Такова напр., функція

$$x^6 - x^2 + 3,$$

неприводимая въ области цѣлыхъ чиселъ и дающая, при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ x, числа, дѣлящіяся на 3.

§ 30. Нѣкоторымъ шагомъ впередъ въ рѣшеніи вопроса, о которомъ шла рѣчь въ предыдущемъ §, для цѣлыхъ функцій 2-й степени является одна замѣчательная теорема П. Л. Чебышева относительно простыхъ дѣлителей чиселъ вида

$$x^2 + 1.$$

Доказательства этой теоремы, формулировку которой мы приведемъ ниже, при жизни покойнаго математика въ печати не появлялось. Академикъ А. А. Марковъ, разбирая бумаги Чебышева, нашелъ небольшой обрывокъ и по этому обрывку возстановилъ вполнѣ доказательство. Его мемуаръ былъ напечатанъ въ Извѣстіяхъ Императорской Академіи Наукъ за 1895 г. Предложеніе П. Л. Чебышева, какъ было мною замѣчено (Извѣстія Императорской Академіи Наукъ, 1895 г.) можетъ быть обобщено и въ этомъ обобщенномъ видѣ можетъ быть формулировано такъ: если A и a обозначаютъ цѣлыя взаимно простыя положительныя числа и μ наибольшій простой дѣлитель чиселъ

$$A + a.1^2, \quad A + a.2^2, \ldots, \quad A + a.N^2,$$

то отношеніе

$$\frac{\mu}{N}$$

возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ N. Доказательству этой теоремы мы предпосылаемъ одну лемму.

§ 31. Лемма. Если D обозначаетъ положительное или отрицательное число и $\sqrt{D}$ не равенъ цѣлому вещественному числу, то сумма

$$S_\mu = \sum \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p}, \tag{1}$$

гдѣ $\left(\frac{D}{p}\right)$ символъ Лежандра и гдѣ суммированіе по p распространено на всѣ простыя числа p, (на которыя число D не дѣлится) не превышающія заданнаго числа μ, остается, при безпредѣльномъ возрастаніи p, числомъ конечнымъ.

Доказательство. Пусть

$$D = R^2 D',$$

гдѣ D' и R цѣлыя числа и ни одинъ изъ дѣлителей числа D' (кромѣ 1) не есть полный квадратъ. Замѣняя въ равенствѣ (1) D его значеніемъ, находимъ

$$S_\mu = \sum \left(\frac{D'}{p}\right) \frac{\log p}{p}.$$

1-й случай: число $D' > 0$ и имѣетъ форму

$$4m + 1.$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = \sum \left(\frac{p}{D'}\right) \frac{\log p}{p},$$

гдѣ $\left(\frac{p}{D'}\right)$ символъ Лежандра-Якоби. Далѣе пусть число D' будетъ разложено на простые множители и пусть

$$D' = p_1 p_2 \ldots p_k.$$

Обращаясь къ предыдущей главѣ и полагая число a равнымъ D беремъ то произведеніе

$$\omega_0 \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k$$

въ которомъ

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_k = -1$$

(число ω_0 въ разсматриваемомъ случаѣ равно 1). Пусть значокъ этого произведенія будетъ $m + 1$. Тогда, обозначая черезъ p любое простое число, на которое a не дѣлится, будемъ имѣть:

$$f_m(p) = (-1)^{i_1} (-1)^{i_2} \ldots (-1)^{i_k},$$

гдѣ

$$i_1 = Ind\ p \ (\text{Mod}\ p_1)$$

$$i_2 = Ind\ p \ (\text{Mod}\ p_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$i_k = Ind\ p \ (\text{Mod}\ p_k).$$

Такъ какъ

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)=(-1)^{i_1},\quad \left(\frac{p}{p_r}\right)=(-1)^{i_2},\ldots\left(\frac{p}{p_k}\right)=(-1)^{i_k},$$

то, слѣдовательно,

$$f_m(p)=\left(\frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p}{p_2}\right)\cdot\cdot\left(\frac{p}{p_k}\right)=\left(\frac{p}{D'}\right),$$

а потому

$$S_\mu=\sum\frac{f_m(p)}{p}\log p.$$

Принимая во вниманіе § 27, мы можемъ считать для даннаго случая лемму доказанной. 2-й случай: число $D'>0$ и имѣетъ форму

$$4m+3.$$

Въ этомъ случаѣ сумма S_μ можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$S_\mu=\sum(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{D'}\right)\frac{\log p}{p}.$$

Полагая въ этомъ случаѣ,

$$D'=p_2\,p_3\ldots p_k \quad \text{и} \quad a=4D',$$

гдѣ $p_2, p_3\ldots p_k$ различныя простыя числа, беремъ то произведеніе

$$\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_k,$$

въ которомъ

$$\omega_0=1,\quad \omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_k=-1$$

и обозначая значокъ этого произведенія черезъ $n+1$, находимъ:

$$f_m(p)=(-1)^{i_1}(-1)^{i_2}\ldots(-1)^{i_k}=(-1)^{i_1}\left(\frac{p}{D'}\right).$$

Такъ какъ

$$i_1=Ind\,p \text{ (мод. 4)}$$

и первообразный корень 4, есть 3, то

$$i_1=0,$$

если число p имѣетъ форму

$$4m+1.$$

и

$$i_1=1,$$

если число p имѣетъ форму

$$4m+3.$$

Слѣдовательно,

$$f_m(p)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{D'}\right)$$

и

$$S_\mu=\sum\frac{f_m(p)}{p}\log p.$$

Значитъ и въ этомъ случаѣ лемма доказана.

3-й случай: $D'>0$ и имѣетъ форму

$$2(4m+1)=2D''.$$

Въ этомъ случаѣ сумма S_μ можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$S_\mu=\sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\left(\frac{p}{D''}\right)\frac{\log p}{p}.$$

Полагая

$$D''=p_2\,p_3\ldots p_k \quad \text{и} \quad a=8D'',$$

беремъ то произведеніе

$$\omega_0\,\omega_1\ldots\ldots\omega_k,$$

въ которомъ

$$\omega_0=1,\quad \omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_k=-1.$$

Если значокъ этого произведенія есть $m+1$, то

$$f_m(p)=(-1)^{i_1}(-1)^{i_2}\ldots(-1)^{i_k}=(-1)^{i_1}\left(\frac{p}{D''}\right).$$

Такъ какъ

$$i_1=0$$

для чиселъ p формъ

$$8m+1 \quad \text{и} \quad 8m+7$$

и

$$i_1=1$$

для чиселъ p формъ

$$8m+3,\quad 8m+7,$$

то

$$f_m(p)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\left(\frac{p}{D''}\right)$$

и лемма доказана.

4-й случай: $D'>0$ и имѣетъ форму

$$2(4m+3)=2D''.$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = \sum (-1)^{\frac{p-1}{2} + \frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{p}{D''}\right) \frac{\log p}{p}.$$

Полагая

$$D'' = p_2 p_3 \dots p_k \quad \text{и} \quad a = 8D'',$$

беремъ то произведеніе $\omega_0 \omega_1 \dots \omega_k$ (съ значкомъ $m+1$), въ которомъ

$$\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_k = -1.$$

Имѣемъ:

$$f_m(p) = (-1)^\alpha (-1)^{i_1} (-1)^{i_2} \dots (-1)^{i_k} = (-1)^{\alpha + i_1} \left(\frac{p}{D''}\right).$$

Если p имѣетъ форму

$$8m+1,$$

то

$$\alpha = 0, \quad i_1 = 0;$$

если p имѣетъ форму

$$8m+7,$$

то

$$\alpha = 1, \quad i_1 = 0;$$

если p имѣетъ форму

$$8m+3,$$

то

$$\alpha = 1, \quad i_1 = 1$$

и наконецъ, если p имѣетъ форму

$$8m+5,$$

то

$$\alpha = 0, \quad i_1 = 1.$$

Отсюда легко находимъ, что

$$f_m(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2} + \frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{p}{D''}\right)$$

и лемма доказана.

5-й случай: $D' < 0$ и имѣетъ форму

$$-(4m+1) = -D''$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = \sum (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{D''}\right) \frac{\log p}{p}$$

и число a надо положить равнымъ $4D''$. Дальнѣйшія разсужденія тѣ же, что во 2-мъ случаѣ.

6-й случай: $D' < 0$ и

$$D' = -D'' = -(4m + 3).$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = \sum \left(\frac{p}{D''}\right) \frac{\log p}{p}$$

и число a надо положить равнымъ D''. Дальнѣйшія разсужденія тѣ же, что въ 1-мъ случаѣ.

7-й случай: $D' < 0$ и

$$D' = -2D'' = -2\,(4m + 1).$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \frac{p-1}{p}} \left(\frac{p}{D''}\right) \frac{\log p}{p}$$

и a надо положить равнымъ $8D''$. Дальнѣйшія разсужденія тѣ же, что въ 4-мъ случаѣ.

8-й случай: $D' < 0$ и

$$D' = -2D'' = -2\,(4m + 3).$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{p}{D''}\right) \frac{\log p}{p}$$

и a надо положить равнымъ $8D''$. Дальнѣйшія разсужденія тѣ же, что и въ 3-мъ случаѣ.

Такимъ образомъ лемма можетъ считаться доказанной вполнѣ.

§ 32. Переходя къ доказательству вышеприведенной, обобщенной нами теоремы П. Л. Чебышева, считаемъ необходимымъ замѣтить, что тѣ разсужденія, при помощи которыхъ мы убѣдимся въ справедливости этого предложенія, почти тождественны съ разсужденіями, которыя мы находимъ въ вышеупомянутомъ мемуарѣ А. А. Маркова.

1-й случай:

$$A = 2m + 1 = p_1\, p_2 \ldots p_i,$$

— числа $p_1, p_2 \ldots p_i$ простыя.

Беремъ изъ ряда чиселъ

$$A + d.1^2, \quad A + d.2^2, \ldots . A + dN^2$$

всѣ числа вида

$$A + d\,(2l)^2.$$

Пусть μ' обозначаетъ ихъ наибольшій простой дѣлитель и

$$N' = E\frac{N}{2}.$$

Разсмотримъ сумму

$$\sum_{l=1}^{l=N'} \log(A + 4dl^2) = \log(A + 2^2 d) + \log(A + 4^2 d) + \ldots + \log\left(A + 4aN'^2\right),$$

которая можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{l=1}^{l=N'} \log\,(A + 4dl^2) = \sum \lambda_p \log p + \sum \lambda_q \log q,$$

гдѣ въ первой суммѣ суммированіе распространено на всѣ простыя числа $p_1, p_2, \ldots p_i$, а во второй — на всѣ остальныя простыя числа, логариѳмы которыхъ входятъ въ сумму

$$\sum_{l=1}^{l=N'} \log\,(A + 4dl^2).$$

Легко находимъ слѣдующее равенство

$$\text{(2)} \qquad \sum \lambda_p \log p = \left(E\frac{N'}{p_1}\right)\log p_1 + \left(E\frac{N'}{p^2}\right)\log p_2 + \ldots . + \left(E\frac{N'}{p_i}\right)\log p_i.$$

Опредѣлимъ высшій предѣлъ для λ_q. Каждое изъ простыхъ чиселъ q очевидно удовлетворяетъ условію:

$$\left(\frac{-Ad}{q}\right) = 1.$$

Такъ какъ сравненіе

$$\text{(3)} \qquad A + 4dx^2 \equiv 0 \ (\mathrm{Mod}\ q^k),$$

при условіяхъ

$$1 \leqq x \leqq q^k - 1$$

допускаетъ два рѣшенія, то число рѣшеній этого сравненія при условіяхъ

$$1 \leqq x \leqq N'$$

не превышаетъ

$$2\frac{N'}{q^k} + 1.$$

Принимая во вниманіе, что, если

$$q^k > A + 4dN'^2$$

и значитъ

$$k > \frac{\log (A + 4dN'^2)}{\log q},$$

то сравненіе (3) при ограниченіи x неравенствами

$$1 \leqq x \leqq N'$$

рѣшеній не имѣетъ, мы заключаемъ, что общее число рѣшеній сравненій

$$A + 4dx^2 \equiv 0 \text{ (Mod } q), \quad A + 4dx^2 \equiv 0 \text{ (Mod } q^2), \ldots\ldots A + 4dx^2 \equiv 0 \text{ (Mod } q^k),$$

гдѣ

$$k \leqq \frac{\log (A + 4dN'^2)}{\log q}$$

при условіяхъ

$$1 \leqq x \leqq N'$$

не превышаетъ слѣдующаго числа

$$2N'\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^k}\right) + \frac{\log (A + 4dN'^2)}{\log q}.$$

А такъ какъ общее число всѣхъ послѣднихъ сравненій, какъ не трудно видѣть, при нашихъ ограниченіяхъ x и есть коэффиціентъ λ_q, то слѣдовательно,

$$\lambda_q < 2N'\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{q^k}\right) + \frac{\log (A + 4dN'^2)}{\log q}.$$

Изъ равенствъ (1) и (2) и послѣдняго неравенства выводимъ такое неравенство:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{l=1}^{l=N'} \log (A + 4dl^2) < \sum_{k=1}^{k=i} \left(E\frac{N'}{p_k}\right) \log p_k + \\ + 2N' \sum \frac{\log q}{q-1} + \varphi_1(\mu') \log (A + 4dN'^2), \end{aligned} \right.$$

гдѣ q означаетъ всѣ простыя числа, удовлетворяющія условіямъ

$$\left(\frac{-Ad}{q}\right)=1,\quad q\leqq\mu',$$

а $\varphi_1(\mu')$ — число ихъ. Замѣчая, что

$$\sum_{l=1}^{l=N'}\log(A+4dl^2)>\sum_{l=1}^{l=N'}\log 4dl^2=2N'\log 2\sqrt{d}+2.\log 1.2.3\ldots N'$$

и

$$2N'\log 2\sqrt{d}+2\log 1.2.3\ldots N'>2N'\log N'-N',$$

мы заключаемъ, что и подавно

$$2N'\log N'-N'<N'\sum_{k=1}^{k=i}\frac{\log p_k}{p_k}+2N'\sum\frac{\log q}{q-1}+\varphi_1(\mu')\log(A+4dN'^2),$$

а отсюда выводимъ слѣдующее неравенство:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\log N'}{\log\mu'}<\frac{1}{2\log\mu'}+\frac{1}{2\log\mu'}\sum_{k=1}^{k=i}\frac{\log p_k}{p_k}+\frac{1}{\log\mu'}\sum\frac{\log q}{q-1}+\\+\frac{\varphi_1(\mu')}{2N'\log\mu'}\log(A+4N'^2).\end{aligned}\right.$$

Обозначая черезъ q' всѣ простыя числа, удовлетворяющія условіямъ

$$\left(\frac{-Ad}{q}\right)=-1,\quad q'\leqq\mu'$$

и принимая во вниманіе предыдущую лемму и § 17 главы второй, мы имѣемъ

$$\sum\frac{\log q}{q}+\sum\frac{\log q'}{q'}=\log\mu'+\alpha$$

$$\sum\frac{\log q}{q}-\sum\frac{\log q'}{q'}=a_1,$$

гдѣ a_1 и α обозначаютъ числа конечныя и абсолютное значеніе α не превосходитъ 2. Слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи μ' каждое изъ чиселъ

$$\frac{1}{\log\mu'}\sum\frac{\log q}{q}\quad\text{и}\quad\frac{1}{\log\mu'}\sum\frac{\log q'}{q'}$$

стремится къ предѣлу $\frac{1}{2}$. Замѣчая же, что

$$\frac{1}{\log\mu'}\sum\frac{\log q}{q-1}=\frac{1}{\log\mu'}\sum\frac{\log q}{q}+\frac{1}{\log\mu'}\sum\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots\right)\log q,$$

имѣемъ

$$\left(\lim \frac{1}{\log \mu'} \sum \frac{\log q}{q-1}\right)_{\mu'=\infty} = \frac{1}{2}.$$

Будемъ теперь число N' безпредѣльно увеличивать. Вмѣстѣ съ N' должно увеличиваться безпредѣльно и μ'.

Допустимъ, что отношеніе

$$\frac{\mu'}{N'},$$

при безпредѣльномъ возрастаніи N' остается меньше нѣкотораго числа h большаго 1. Такъ какъ при такомъ допущеніи

$$\lim \left(\frac{\log N'}{\log \mu'}\right)_{N'=\infty} = 1, \tag{6}$$

то, слѣдовательно, при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ N'

$$\frac{\mu'}{\log \mu'} \frac{\log N'}{N'} < h,$$

а потому, при достаточно большихъ значеніяхъ N'

$$\frac{\varphi_1(\mu')\log(A+4dN'^2)}{2N'\log\mu'} = \frac{\varphi_1(\mu')}{\mu'} \cdot \frac{\log(A+4dN'^2)}{\log N'^2} \cdot \frac{\mu'}{\log\mu'} \cdot \frac{\log N'}{N'} <$$

$$h\frac{\varphi_1(\mu')}{\mu'}\,\frac{\log(A+4dN'^2)}{\log N'^2},$$

и такъ какъ

$$\lim \left(\frac{\varphi_1(\mu')}{\mu'}\right)_{\mu'=\infty} = 0, \quad \left(\frac{\lim(A+4dN'^2)}{\lim N'^2}\right)_{N'=\infty} = 1,$$

то

$$\lim \left(\frac{\varphi_1(\mu')\log(A+4dN'^2)}{2N\log\mu'}\right)_{N'=\infty} = 0$$

и значитъ предѣлъ второй части неравенства (5) равенъ $\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, на основаніи того же неравенства, мы находимъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ N' отношеніе

$$\frac{\log N'}{\log \mu'},$$

будетъ менѣе всякаго даннаго числа, которое больше $\frac{1}{2}$, что находится въ противорѣчіи съ равенствомъ (6). Это противорѣчіе и показываетъ, что отношеніе

$$\frac{\mu'}{N'}$$

не можетъ оставаться числомъ конечнымъ при безпредѣльномъ возрастаніи N', а должно также безпредѣльно возрастать. Но

$$\mu' \leqq \mu$$

и

$$N' = E\frac{N}{2},$$

а потому, отношеніе

$$\frac{\mu}{N}$$

съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ N также возрастаетъ безпредѣльно.

2-й случай:

$$A = A'^2 p_1 p_2 \ldots p_i$$

— числа $p_1, p_2, \ldots p_i$ простыя, большія 2 и A' число цѣлое. Въ этомъ случаѣ изъ ряда чиселъ

$$A + d1^2, \quad A + d2^2, \ldots A + dN^2$$

беремъ всѣ числа вида

$$A'^2 [p_1 p_2 \ldots p_i + (2l)^2].$$

Пусть μ' обозначаетъ наибольшій простой дѣлитель чиселъ

$$p_1 p_2 \ldots p_i + (2l)^2$$

и далѣе пусть

$$E\frac{N}{2A'} = N'.$$

Отношеніе

$$\frac{\mu'}{N'}$$

по доказанному возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ N', а слѣдовательно, возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ N и отношеніе

$$\frac{\mu}{N}.$$

3-й случай:

$$A = 2A'^2 (2m + 1) = 2A'^2 p_1 p_2 \ldots p_i$$

— числа $p_1, p_2 \ldots p_i$ простыя и A' число цѣлое. Въ этомъ случаѣ беремъ изъ ряда чиселъ

$$A + d\ 1^2, \quad A + d.2^2, \ldots A + dN^2$$

всѣ числа вида

$$A'^2\left[2\,(2m+1)+(2l+1)^2\right].$$

Обозначимъ черезъ μ' наибольшій простой дѣлитель чиселъ

$$2\,(2m+1)+(2l+1)^2$$

и черезъ N' — наибольшее изъ чиселъ l. Разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, мы убѣдимся, что отношеніе

$$\frac{\mu'}{N'}$$

возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ N', а слѣдовательно и отношеніе

$$\frac{\mu}{N}$$

— вмѣстѣ съ N.